수익률(Rate of Return)의 측정

- **1**년전 삼성전자 주식을 주당 **40**만원**(P_0)**에 **100**주**(X)** 샀다고 가정하자**.** 주당 **60**만원**(P_1)**에 전량 매도하였고 **1**년간 배당금으로 주당 **5**천원씩**(d)**을 받았다면**?**

  - 금액기준 수익

    총수익 = 배당소득**(D=d·X) +** 자본차익**(Capital Gains)((P_1-P_0)•X)**
    = 0.5×100 + (60-40) ×100 = 2,050만원

  - 백분율 수익

    % 수익 **= {**배당수익**(D) +** 자본차익**(P_1-P_0)•X} /** 투자액**(P_0•X)**
    = 배당수익률**(d/P_0) +** 자본차익률**{(P1-P_0)/P_0}**
    = 1.25% + 50% = 51.25%((d+P_1-P_0)/P_0)

A. 과거 자료(Historic data)로부터의 평균 수익

- 과거 수익률(예를 들면 연수익률)이 주어진 상태에서 수익률 통계는 다음과 같은 일련의 수치로 측정될 수 있음

1). 평균수익률

- 기하평균: $r_g = \{[(1+r_1)\ (1+r_2)\ ....\ (1+r_n)]\}^{1/n} - 1$
  복리를 가정한 평균 보유수익률(**Holding Period Return**)
  => 보유기간수익률(**HPR**)을 나타내는 의미로서는 더 적절함

- 산술평균: $r_a = (r_1 + r_2 + ... + r_n) / n$
  복리를 가정하지 않은 단순 평균
  => 사용이 간편하나 상향편차(**upward bias**)를 기록.
  그러나, 일반적으로 평균-분산에서는 산술평균을 사용.
  e.g.) CAPM analysis in one period model

A. 과거 자료로부터의 평균 수익 (계속)

- 보기
  다음 회사가 배당을 전혀 지불하지 않았을 때의 산술평균수익률을 계산하시오

Year	1991	1992	1993	1994	1995
Price at the beginning of the year	\$100	\$110	\$120	\$130	\$120

Price at the beginning of the year	\$100	\$110	\$120	\$130	\$120
Return		0.10	0.09	0.08	-0.08
Arithmetic mean return	4.93%				

Note that these are rounded-up

- 기하평균수익률(**geometric mean return**)은?

$r = \{(1.1)(1.09)(1.08)(0.92)\}^{1/4} - 1 = (120/100)^{1/4} - 1 = 4.66\%$

A. 과거 자료로부터의 평균 수익 (계속)

- 산술평균의 편차(Bias)
  - 산술평균에는 상향 편차가 존재.
  - 왜?
  - (예) 100 150 100 ; (50.0%, -33.3%)
    100 50 100 ; (-50.0%, 100.0%)

    위 가격들에 대한 산술평균은? 8.3%, 25.0%
  - 가격들의 변동성이 심해질수록 이 편차는 확대된다.

  다음 가격들의 산술평균은? (100, 200, 100) ; (100.0%, -50.0%)→25.0%

A. 과거 자료로부터의 수익률 분산

2). 수익률 분산

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - E(r))^2,$$

where N is the number of observations, r_t is the return of the stock at time t, and E(r) is the average return during the sample period.

- 수익률 표준편차 = (수익률 분산)$^{1/2}$

(예) 위의 **1991~1995**년의 가격변화 예에서 산술평균에서의 수익률 분산을 계산하시오

Var = 0.0071

= (1/3) ×{(0.1-0.049)^2+(0.09-0.049)^2+(0.08-0.049)^2+(-0.08-0.049)^2}

STD = 8.44% = 0.0071$^{1/2}$

A. 과거자료로부터의 수익률 공분산

3). 수익률 공분산(Covariance of Returns)

$$Cov_{1,2} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(r_{t,1} - E(r_1)) \times (r_{t,2} - E(r_2))$$

(Ex)

Year	주식 1	주식 2
1995	0.10	0.20
1996	-0.15	-0.20
1997	0.20	-0.10
1998	0.25	0.30
1999	-0.30	-0.20
2000	0.20	0.60
산술평균 수익률	0.05	0.10

다음을 확인

Cov = 0.0425

B. 확률적 가정으로부터의 예상(평균) 수익률

- 가능한 상황(state)들에 대한 확률분포가 주어졌을 때, 상황의 함수로 도출되는 주식의 예상(평균)수익률(Expected return)은 다음과 같음

$$E(r) = \sum_{i=1}^{S} p_i \times r_i, \quad where$$

$$S \text{ is the number of states, } p_i \text{, prob. of state i, and } r_i \text{, return in state i.}$$

- (예)

경제의 상황	상황 확률(p_i)	상황하에서의 수익률(r_i)
+1% GNP 성장률	.25	-5%
+2% GNP 성장률	.50	15%
+3% GNP 성장률	.25	35%

E(r) = {(.25)×(-5)+(.50)×(15)+(.25)×(35)} = -1.25 + 7.50 + 8.75 = 15%

B. 확률적 가정으로부터의 수익률 분산(Variance)

- 예상수익률**(Expected return)**이 주어진 상태하에서**,** 분산**(Variance)**은 다음 과 같음

$$Var(r) \equiv \sigma^2 = \sum_{i=1}^{S} p_i \times (r_i - E(r))^2, \quad where\ E(r)\ is\ the\ expected\ return.$$

- 바로 앞의 예제로부터**,**

$(-0.05-0.15)^2 \times 0.25$

i	$(r_i - E(r))^2$	$(p_i \times (r_i - E(r))^2$
i=1	.04	.01
i=2	0	0
i=3	.04	+ .01
		Var(r) = .02

표준편차는 얼마? **SD(r)= 0.02$^{0.5}$=0.14**

B.확률적 가정으로부터의 공분산(Covariance)

- 상황함수로서의 주식수익률과 상황이 주어졌을 때 우선 주식들의 기대(평균)수익률들을 구한 후, 다음에 기대수익률을 바탕으로 다음과 같이 공분산을 구한다

$$Cov(r_1, r_2) \equiv \sigma_{12} = \sum_{i=1}^{S} p_i (r_{1i} - E(r_1))(r_{2i} - E(r_2)), \quad where$$

$$E(r_i) \text{ is the expected return on stock } i = 1,2.$$

경제상황	상황확률	자산1에 대한수익률	자산2에 대한 수익률
호황	0.40	30%	-5%
불황	0.60	-10%	25%

B. 확률적 가정으로부터의 공분산 (계속)

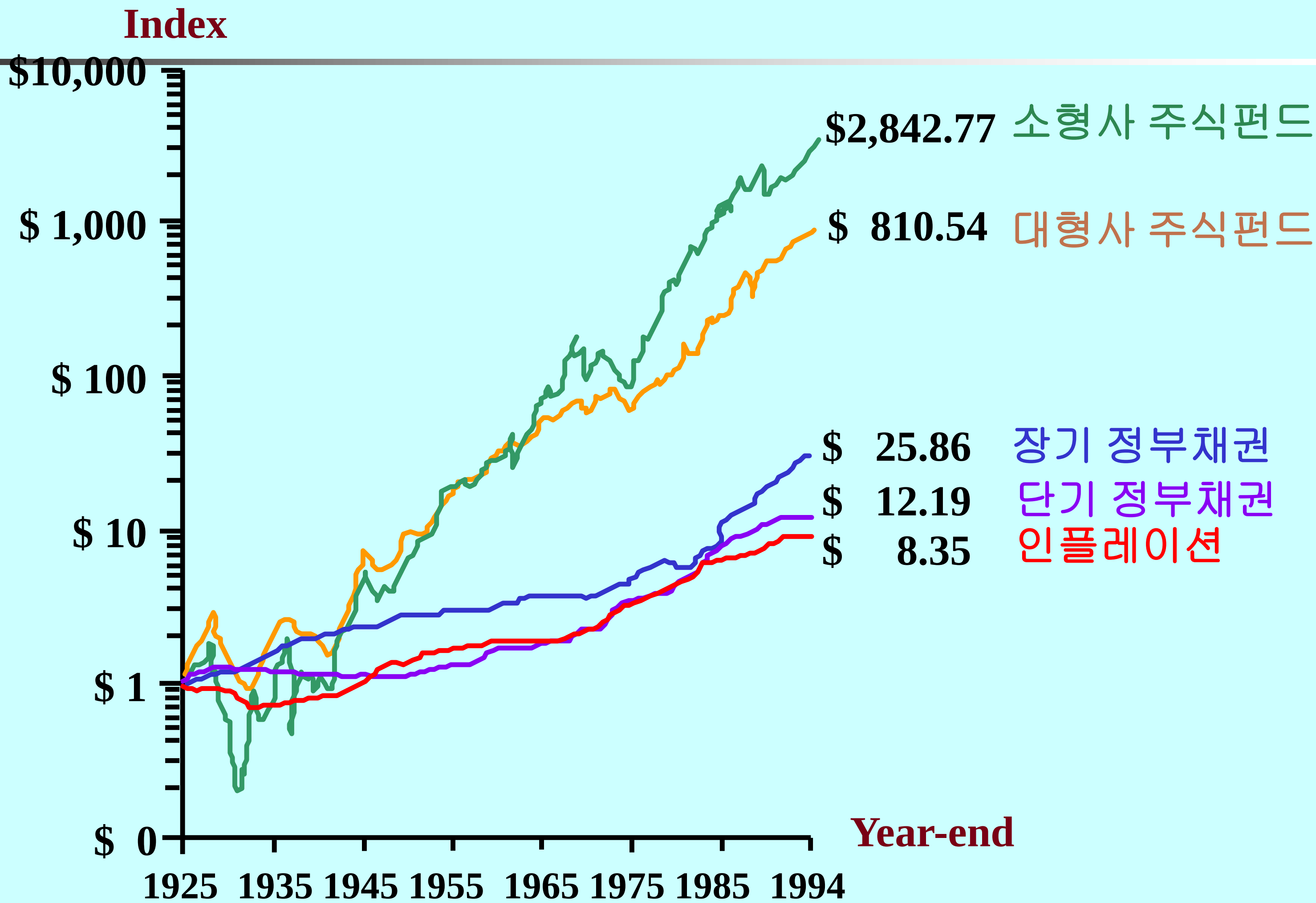
Step 1. 자산1,2에 대한 기대(평균)수익률(Expected returns)

$E(r_1) = 0.40 \times (.30) + 0.60 \times (-.10) = .06 = 6\%$
$E(r_2) = 0.40 \times (-.05) + 0.60 \times (.25) = .13 = 13\%$

Step 2. 자산 1,2의 공분산(Covariance of returns)

$$\begin{aligned} Cov(r_1, r_2) &= 0.4(.3-.06)(-.05-.13) + 0.6(-.1-.06)(.25-.13) \\ &= -0.0288 \end{aligned}$$

C.과거로부터의 교훈 I: 1926-1994 기간중 미국의 서로 다른 포트폴리오에 $1씩을 투자 (1925년말 = $1.00)



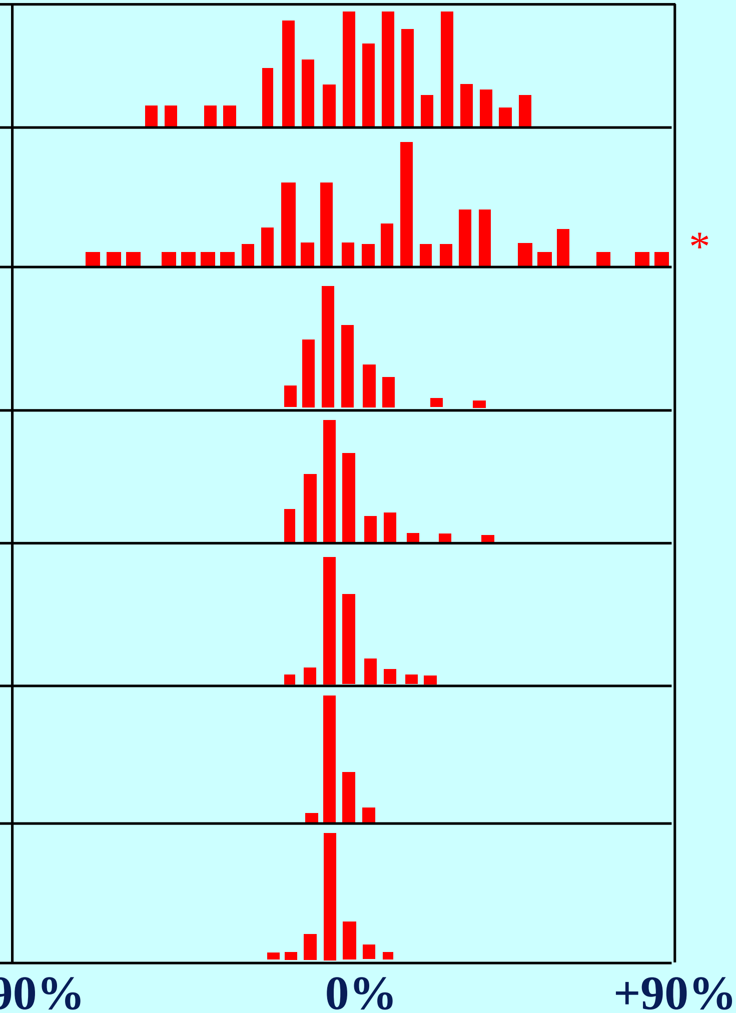
Redrawn from Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1995 Yearbook,™ annual updates work by Roger G. Ibbotson and Rex A. Singuefield (Chicago: Ibbotson Associates).

C.과거로부터의 교훈 II: 전체 연간수익률, 1926-1994

Risk Premium

펀드종류	산술평균	(U.S.TB에 대한)	표준편차
보통주 펀드	12.2%	8.5%	20.3%
소형주 펀드	17.4	13.7	34.6
장기 회사채	5.7	2.0	8.4
장기 정부채	5.2	1.5	8.8
중기 정부채	5.2	1.5	5.7
단기정부채 (T. Bills)	3.7		3.3
Inflation	3.2		4.6

수익률 분포



* 1993년의 소형주펀드 연수익률은 142.9 %였음

C.과거로부터의 교훈 (계속)

- 과거 수익률 자료로부터의 예시는 **(**평균**)**수익률과 분산이 서로 같은 방향으로 연관되어 있다라는 점을 분명히 보여준다**.** 만약 분산을 위험의 척도로 인정한다면 더 높은 수익을 얻기 위해서는 더 높은 위험을 감수하여야 한다는 뜻이다**.**
  - 예를 들어 연간 **30%**의 수익을 얻고자 한다면 저축성 예금에 돈을 넣어서는 안된다**.** 오히려 투자자금의 대부분을 잃는 위험을 충분히 인식한 상태에서 초기 창업회사에 돈을 투자하여야 하는 것이다**.**

수익률 상관계수(Correlation Coefficient)

- 수익률 상관계수(**Correlation Coefficient)**
  - 두 주식(자산)의 수익률이 같이 변하는 정도를 측정한 통계량
  - 두 자산간의 공분산을 두 자산 각각의 표준편차 곱으로 나누어 측정
  - 이는 −**1**과 +**1**사이의 값만을 취함

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(R_A, R_B)}{STD(R_A) \times STD(R_B)} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B}, \quad -1 \le \rho_{AB} \le 1$$

- **[예제]** $\sigma_A = 19.6\%, \;\; \sigma_B = 14.7\%, \;\; \sigma_{AB} = -0.0288$ 일 때 **A, B**의 상관계수는**?**

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0.0288}{(0.196)(0.147)} = -0.99$$

'위험(Risk)'의 정의는?

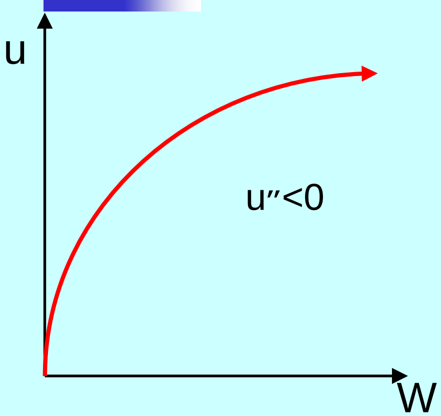
- **Danger(=Downside Risk)**
  - 투자된 자본을 잃을 수 있는 가능성.
  - 미래수익의 '왜도(Skewness)'로 측정.

보통 VaR측정에 사용

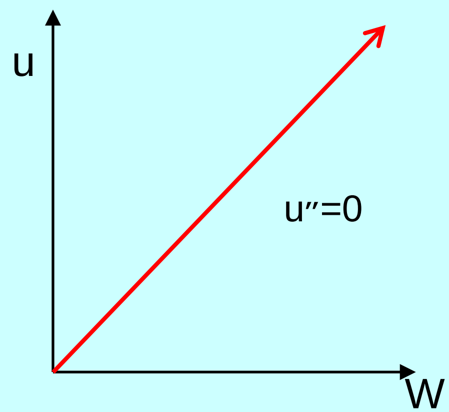
- **Risk(or Uncertainty)**
  - 투자된 자본을 잃을 수 있을 뿐만 아니라 투자로부터 고수익을 얻을 수 있는 가능성.
  - 미래수익의 '분산(Variance)' 으로 측정

보통 Portfolio 관리에 사용

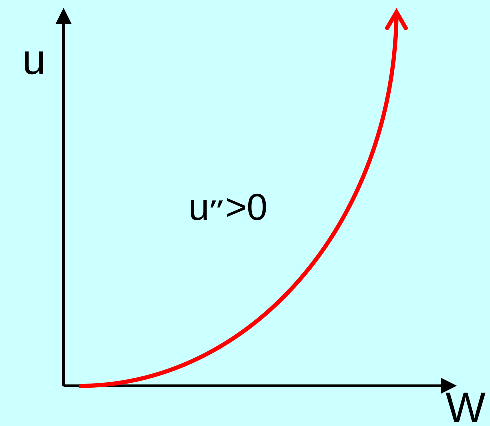
위험회피(Risk Aversion)와 효용함수(Utility ft)



위험회피(Risk Aversion)

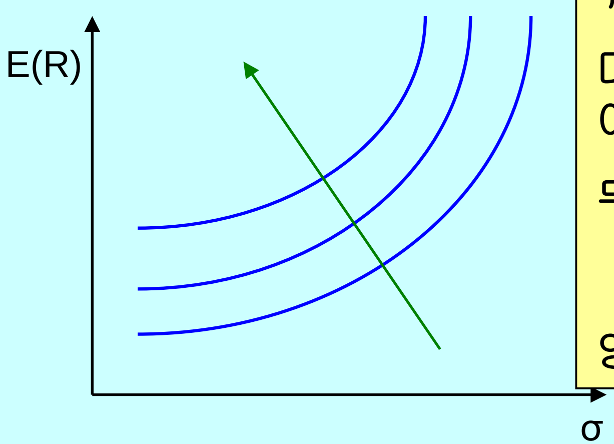


위험중립(Risk Neutrality)



위험추구(Risk Loving)

<평균-분산 기준 효용함수>



위험회피자는 보다 큰 기대수익률과 작은 분산을 선호

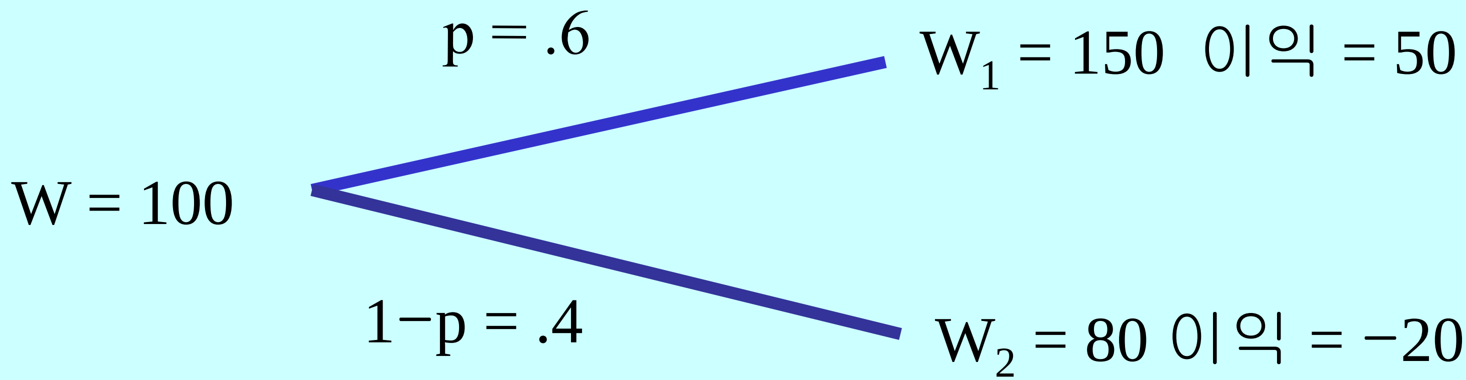
대표적 효용함수: $E(u) = E(R_P) – ½ A \sigma_P^2$,
이때 A는 위험회피의 정도를 표시

무차별곡선은 우상향, 아래로 볼록(convex and upward sloping)

$E(u) = E(R_P) – ½ A \sigma_P^2 = k$(상수), $\rightarrow E(R_P) = k + 0.5A\sigma_P^2$

양변을 전미분하면, $1dE(R_P) = A\sigma_P d\sigma_P$, $\rightarrow dE(R)/d\sigma = A\sigma_P > 0$

위험: 불확실한 결과



$$E(W) = pW_1 + (1-p)W_2 = 6\,(150) + .4(80) = 122$$

$$\sigma^2 = p[W_1 - E(W)]^2 + (1-p)\,[W_2 - E(W)]^2 =$$

$$.6\,(150-122)^2 + .4(80-122)^2 = 1{,}176{,}000$$

$$\sigma = 34.293$$

위험 투자안과 무위험 투자안

$p = 0.6$ $W_1 = 150$ 이익 $= 50$

위험 투자

$1-p = 0.4$ $W_2 = 80$ 이익 $= -20$

100

무위험 증권(T-bills) $W_{Rf} = 105$ 이익 $= 5$

위험 프리미엄(Risk Premium) = 17

위험 회피와 효용 함수

- 투자자의 위험 태도
  - 위험 회피(**Risk Averse)**
  - 위험 중립(**Risk Neutral)**
  - 위험 애호(**Risk Seeking)**
- 효용 함수

$$\boxed{U = E(R) - \frac{1}{2}A\sigma^2}$$

(A 는 위험회피의 정도를 측정한 계수**)**

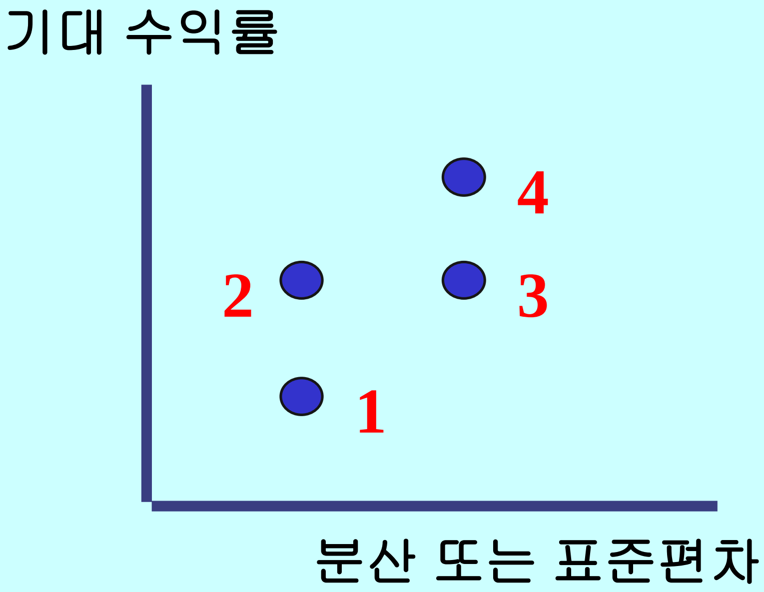
위험 회피와 효용가치: 표본 투자를 사용

$$U = E(R) - 0.5\,A\,\sigma^2$$
$$= 0.22 - 0.5\,A\,(0.34)^2$$

위험 회피도	A	효용가치
High	5	-6.90%
↓	3	4.66%
Low	1	16.22%

vs. T-bill => 5%

지배 원리(Dominance Principle)



- **2** 는 **1**을 지배; 더 높은 수익률
- **2** 는 **3**을 지배; 더 낮은 위험
- **4** 는 **3**을 지배; 더 높은 수익률

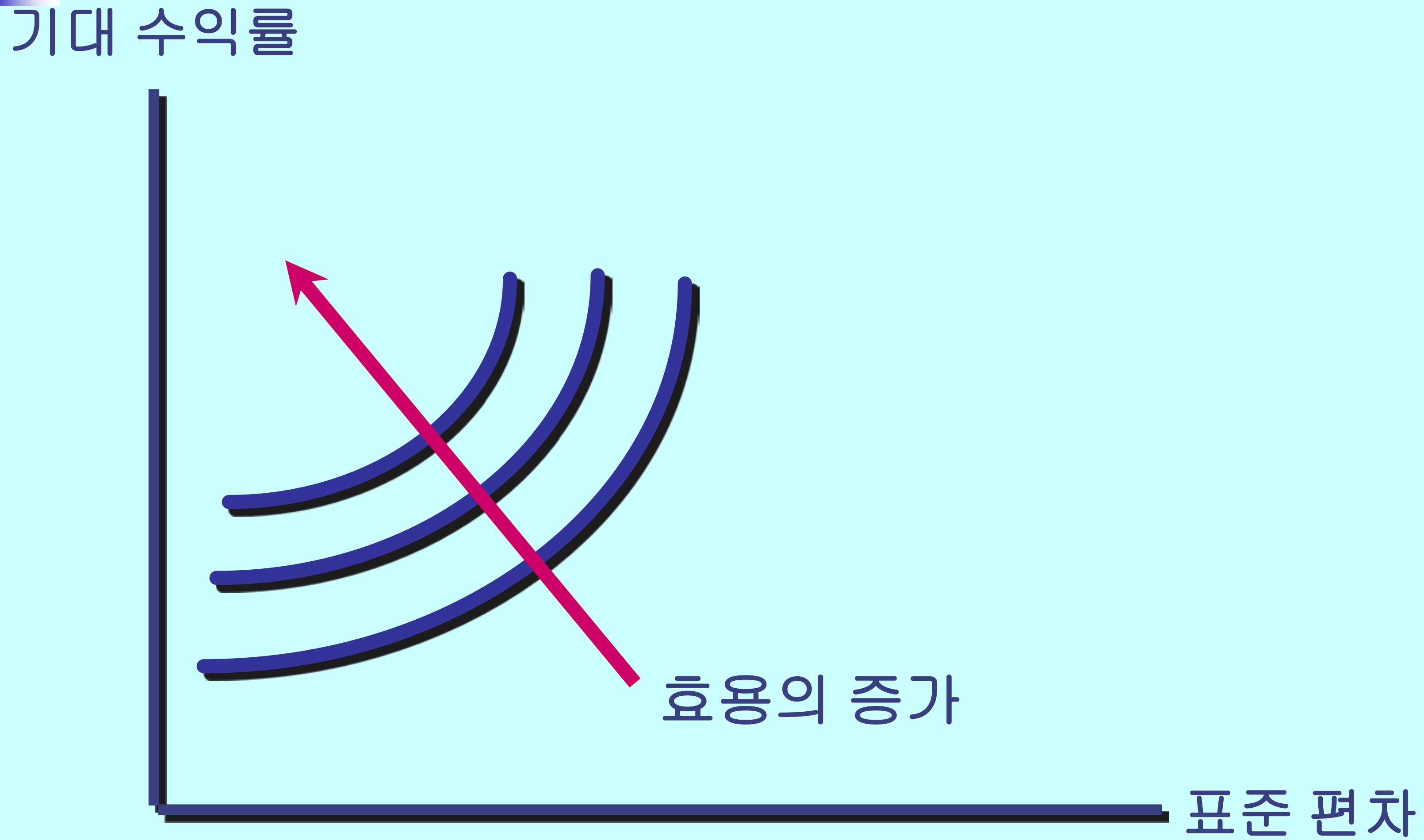
효용과 무차별 곡선

- 무차별곡선은 투자자의 위험-수익률간 교환(trade-off)정도를 나타냄.

- (Ex)

기대수익률	표준편차	$U = E(R) - 0.005A\sigma^2$ (as %, A=4) or $U = E(R) - (1/2)A\sigma^2$ (A=4)
10%(0.1)	20.0%(0.2)	2%(0.02)
15%(0.15)	25.5%(0.255)	2%(0.02)
20%(0.2)	30.0%(0.3)	2%(0.02)
25%(0.25)	33.9%(0.339)	2%(0.02)

무차별 곡선



St. Petersburg Paradox

Petersburg에서의 동전던지기 게임: Head가 처음 나오는 횟수(k)에 따른 상금 지불(2^k)

<표> 동전던지기의 확률분포

Head가 처음 나오는 동전던지기 횟수	결과	확률	상금
1	H	1/2	2
2	TH	1/4	4
3	TTH	1/8	8
4	TTTH	1/16	16
.	.	.	.
.	.	.	.
n	[(n-1)TH]	$1/2^n$	2^n

이 게임의 기대소득은 무한대:$E(R)=(1/2)2+(1/4)4+(1/8)8+(1/16)16+\ldots\ldots=1+1+1+1+\ldots\ldots=\infty$

그러나 게임참가자는 소액만을 참가비로 지불할 용의: 이는 효용이 기대소득에 대한 증가함수이나 한계효용이 체감($u''<0$)하기 때문→D. Bernoulli는 효용함수를 소득(부)에 로그를 씌운 **$u = \ln W$** 의 형태로 파악.

$E[u(W)]=(1/2)\cdot\ln2+(1/4)\ln4+(1/8)\ln8+\ldots=\Sigma_k(1/2^k)\cdot\ln2^k=\ln2\cdot\Sigma(k/2^k)=2\cdot\ln2=\ln4=1.3863$

이때 확실성등가(CE)는 $u(CE)=E[u(W)]$를 만족시키므로 $\ln(CE)=1.3863$→$CE=4$(달러)에 국한됨