6장. 운동량과 충돌

6.1 운동량과 충격량
6.2 운동량의 보존
6.3 충돌
6.4 스치는 충돌
6.5 로켓의 추진

선운동량
(linear Momentum)

속도 v로 움직이는 질량 *m*인 물체의 선운동량(linear momentum)은 질량과 속도의 곱으로 정의된다.

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$$

(벡터량)

단위: kg · m/s

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad KE = \frac{p^2}{2m}$$

충돌 과정을 고려할 때 두 물체의 속도만으로는 충돌 현상을 완전히 이해할 수 없다. 질량이 큰 물체가 빨리 움직일수록 상대방이 입는 피해는 커질 것이다.

질량이 m 인 물체의 운동량 크기 p는 운동에너지 KE와 관계 될 수 있다.

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m} = \frac{(mv)^2}{2m}$$

$$KE = \frac{p^2}{2m}$$

한 물체의 운동량을 변화시키려면 물체에 힘을 작용해야 한다.

$$\mathbf{F}_{\text{알짜}} = m\mathbf{a} = m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\text{운동량의 변화}}{\text{시간 간격}} = \mathbf{F}_{\text{알짜}}$$

(제2법칙의 일반화된 형태)

물체의 운동량의 시간 변화율은 물체에 작용한 일정한 알짜 힘과 같다.

한 물체에 일정한 힘 **F**가 작용하면, 시간 간격 t 동안 물체에 전달되는 충격량(impulse) **I** 는

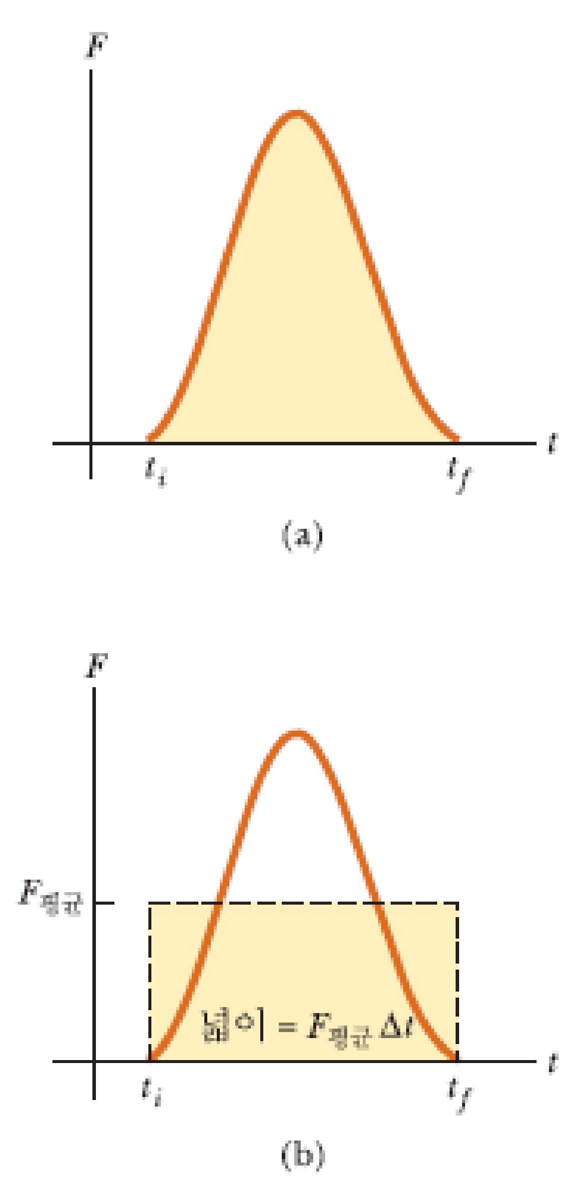
$$\boxed{\mathbf{I} \equiv \mathbf{F}\Delta t}$$

충격량은 물체에 작용하는 힘의 방향과 같다.

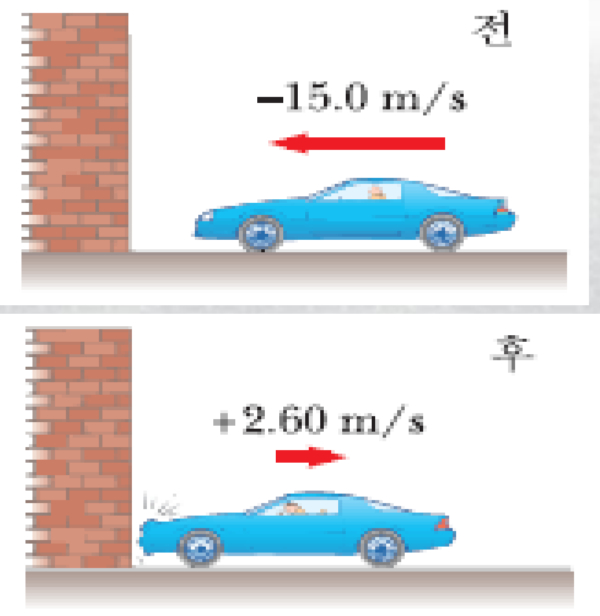
$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t = \Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i$$ (충격량-운동량 정리)

평균 힘: 시간 Δt 동안에 시간에 따라 변하는 실제의 힘처럼 동일한 충격 량을 물체에 전달하는 일정한 힘

$$\mathbf{F}_{평균}\Delta t = \Delta\mathbf{p}$$



예제 6.1 자동차 충돌 시험에서 질량 1500 kg의 자동차가 벽과 충돌한 후 다시 튀어나온다. 자동차의 처음과 나중 속도는 각각 $\mathbf{v}_i$=-15.0 m/s와 $\mathbf{v}_f$ =2.60 m/s이다. 충돌이 0.150초 동안에 일어난다면, (a) 충돌로 인해 차에 전달된 충격량과 (b) 차에 가해지는 평균 힘의 크기와 방향을 구하라.



(a)

(a) $p_i = mv_i = (1500\text{kg})(-15.0\text{m/s}) = -2.25\times10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

$p_f = mv_f = (1500\text{kg})(2.60\text{m/s}) = 0.390\times10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

$$I = p_f - p_i = 0.39\times10^4 - (-2.25\times10^4)$$
$$= 2.64\times10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(b)
$$F_{평균} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2.64\times10^4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\ \text{s}} = 1.76\times10^5\ \text{N}$$

❖자동차 충돌에 의한 부상 (Injury in Automobile Collisions)

자동차 충돌 시 차량 내부의 사람은 운동량 변화를 겪으므로 알짜 힘을 받게 된다.

알짜 힘은 운동량 변화와 시간 간격의 비이므로 동일한 운동량 변화도 시간 간격이 길수록 알짜 힘은 작아진다.

안전벨트, 에어백, 자동차 범퍼 등의 자동차 구조가 시간 간격을 길게 하여 사람이 받는 힘을 줄여주는 역할을 수행한다.

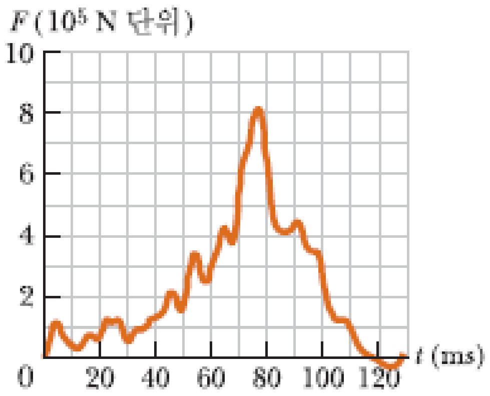
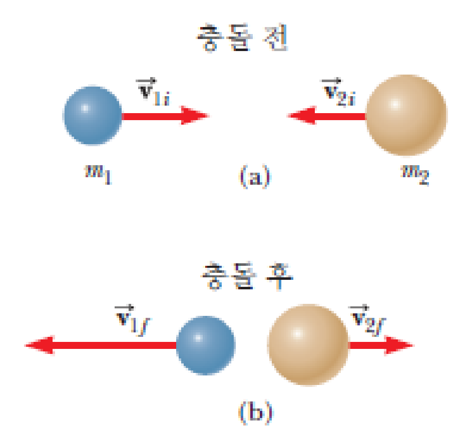


그림 6.4

충돌에서 시간에 따라 차에 작용하는 힘의 그래프

운동량의 보존
(Conservation of Momentum)

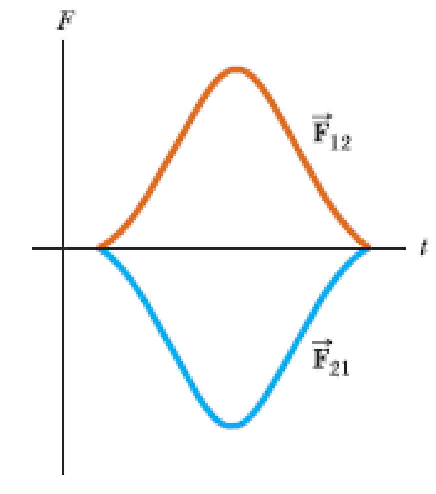
외력이 존재 하는 않는 고립 된 계에서 두 물체가 충돌을 할 경우
오른쪽 그림에서



$$\overline{\mathbf{F}}_{21}\Delta t = m_1\mathbf{v}_{1f} - m_1\mathbf{v}_{1i}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{12}\Delta t = m_2\mathbf{v}_{2f} - m_2\mathbf{v}_{2i}$$

$\overline{\mathbf{F}}_{21} = -\overline{\mathbf{F}}_{12}$ 이고 시간 간격은 동일하므로



$$m_1\mathbf{v}_{1f} - m_1\mathbf{v}_{1i} = -(m_2\mathbf{v}_{2f} - m_2\mathbf{v}_{2i})$$

$$m_1\mathbf{v}_{1i} + m_2\mathbf{v}_{2i} = m_1\mathbf{v}_{1f} + m_2\mathbf{v}_{2f}$$

운동량 보존의 법칙
(law of conservation of momentum)

계에 작용하는 알짜 외부 힘이 없으면, 계의 전체 운동량은 시간에 따라 일정하게 유지된다.

예제 6.2 마찰이 없는 얼음 위에서 궁사가 활을 쏘고 있다. 활과 화살을 포함한 그의 전체 질량은 60.00 Kg 이다. (a) 궁사가 0.030 Kg의 화살을 수평 +x 방향으로 50.0 m/s의 속력으로 쏜다면 그가 얼음 위에서 뒤로 미끄러지는 속도는 얼마인가? (b) 두 번째 화살을 같은 속력으로 수평과 30.0°의 각으로 위로 쏜다면 그가 되튀는 속도는 얼마인가? (c) 활시위에 의해 두 번째 화살이 가속될 때 궁사에 작용하는 평균 수직 항력을 대략 계산해 보라. 활을 당기는 길이는 0.800 m라고 가정한다.

(a) $p_i = p_f$ 이므로 $0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

$$\therefore v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} = -\left(\frac{0.05300kg}{59.97kg}\right)(50.0m/s) = -0.0250m/s$$

(b)

$$m_1 v_{1i} = (m_1 - m_2) v_{1f} + m_2 v_{2f} cos\theta$$

$$v_{1f} = \frac{m_1}{(m_1 - m_2)} v_{1i} - \frac{m_2}{(m_1 - m_2)} v_{2f} cos\theta = -0.0467m/s$$

$$v_{2f}^2 - v_0^2 = 2a\Delta x, \qquad a = 1.56 \times 10^3\ m/s^2$$

$$v = v_0 + at \qquad t = 0.0320\ s$$

$$\overline{F_y}\Delta t = \Delta p_y \qquad \overline{F_y} = \frac{m_2 v_{2f} sin\theta}{\Delta t} = 23.4\ N$$

$$\sum F_y = n - mg - R = 0 \qquad n = 6.11 \times 10^2 N$$

충돌
(Collision)

어떤 형태의 충돌에 대해서도, 계가 고립되어 있다고 가정하면 충돌 전의 계의 전체 운동량은 충돌 후의 계의 전체 운동량과 같다.

그러나 충돌에서 운동 에너지는 일반적으로 보존되지 않는다.

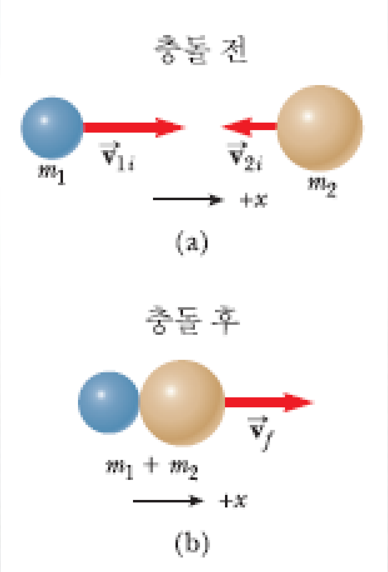
❖**비탄성 충돌(inelastic collision)**: 충돌 과정에서 계의 전체 운동 에너지가 보존되지 않음

◆**완전 비탄성 충돌**: 두 물체가 충돌해서 서로 붙는 충돌

❖**탄성 충돌(elastic collision):** 충돌 과정에서 운동량과 전체 운동 에너지가 보존

탄성 충돌이나 완전 비 탄성 충돌은 극한적인 경우이고, 대부분의 실제 충돌은 이 두 범주 사이에 속한다.

완전 비탄성 충돌
(Perfectly Inelastic Collisions)



충돌한 후 서로 붙어서 함께 운동하는 경우

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$\boxed{v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

운동량은 벡터량이므로 속도 벡터 성분의 부호에 유의!

예제 6.3 1.80 X10^3 kg의 SUV차가 15.0 m/s로 동쪽으로 달리고 반면9.00 X10^2 kg의 소형차는 15.0 m/s로 서쪽으로 달리고 있다(그림 6.10). 두 차는 정면 충돌 후 뒤엉켜버렸다. (a) 충돌 후 뒤엉킨 차들의 속도의 변화를 구하라. (b) 각 차의 속도 변화를 구하라. (c) 두 차로 이루어진 계의 운동 에너지의 변화를 구하라.

(a) $p_i = p_f \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = 5.00\, m/s$$

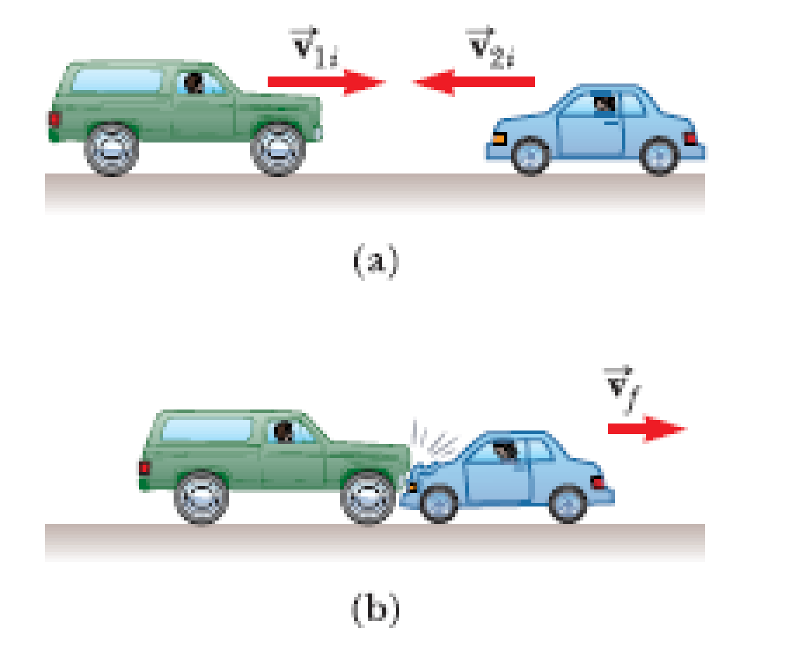
(b) $\Delta v_{SUV} = v_f - v_i = -10.0\, m/s$

$\Delta v_{car} = v_f - v_i = 20.0\, m/s$

(c) $KE_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = 3.04 \times 10^5\, J$

$KE_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = 3.38 \times 10^4\, J$

$$\Delta KE = KE_f - KE_i = -2.70 \times 10^5\, J$$

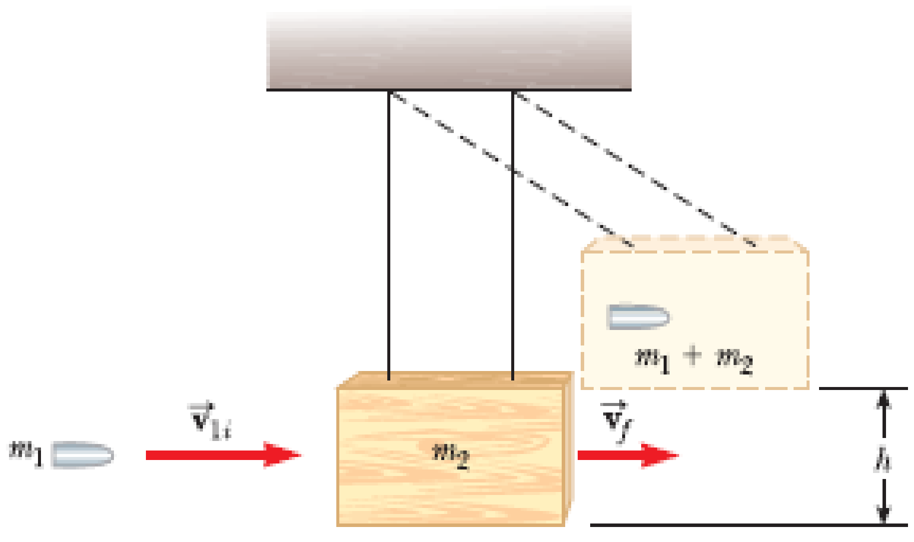


예제 6.4 총알이 가벼운 줄에 매달려 있는 나무토막을 향하여 발사된다. 총알은 나무에 박히고 전체 계는 수직 높이 *h*만큼 올라간다. 두 질량과 *h*를 재면 총알의 처음 속력을 구할 수 있다. 총알의 처음 속력 v_{1i}를 구하라.

$$p_i = p_f \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$KE_{\text{충돌 후}} = PE_{\text{꼭대기}} \rightarrow \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh} \qquad \therefore v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$



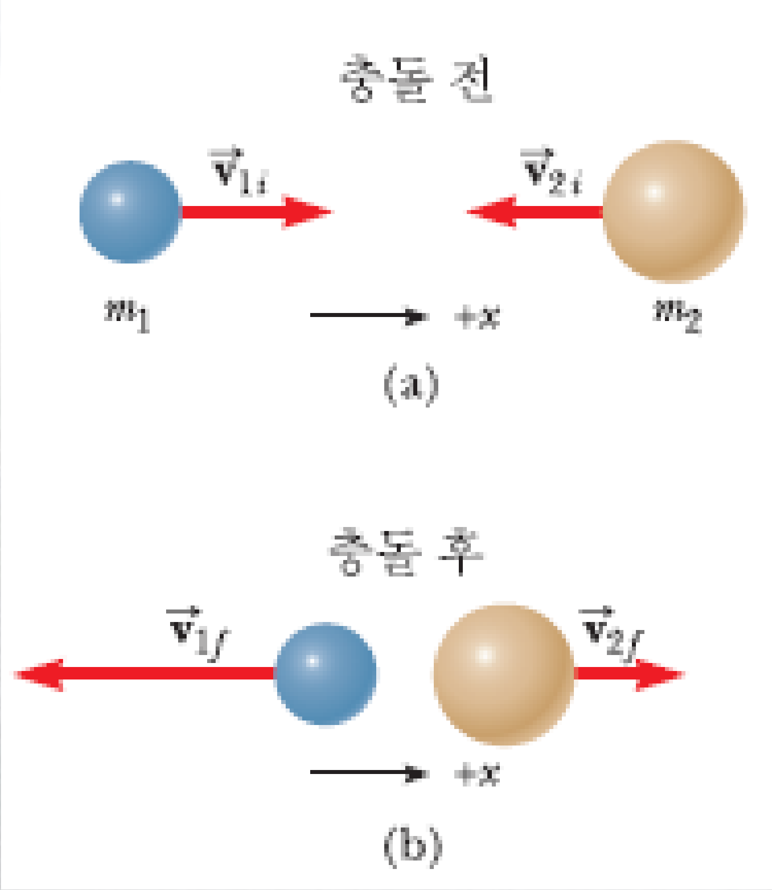
(a)

탄성 충돌
(Elastic Collisions)

두 물체가 정면 탄성 충돌하는 경우, 계의 운동량과 운동 에너지가 모두 보존된다.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$



에너지 관련식을 변형하면 $m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

운동량 보존식에서 $m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

충돌 전 두 물체의 상대 속도는 충돌 후 두 물체의 상대 속도에 음의 부호를 붙인 것과 같다.

예제 6.5 질량 $m_1=1.60\ kg$인 물체가 마찰이 없는 수평면에서 속도 4.00 m/s로 오른쪽으로 움직이다가 질량이 영인 용수철이 달려 있는 질량 $m_2=2.10\ kg$이고 속도 $2.50\ m/s$로 왼쪽으로 움직이는 물체와 충돌한다. 용수철의 용수철 상수는 6.00×10^2 N/m이다. (a) 그림과 같이 물체 1이 속도 3.00 m/s로 오른쪽으로 움직이는 순간 물체 2의 속도를 구하라. (b) 이 순간 용수철이 압축되는 거리를 구하라.

(a)

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$$

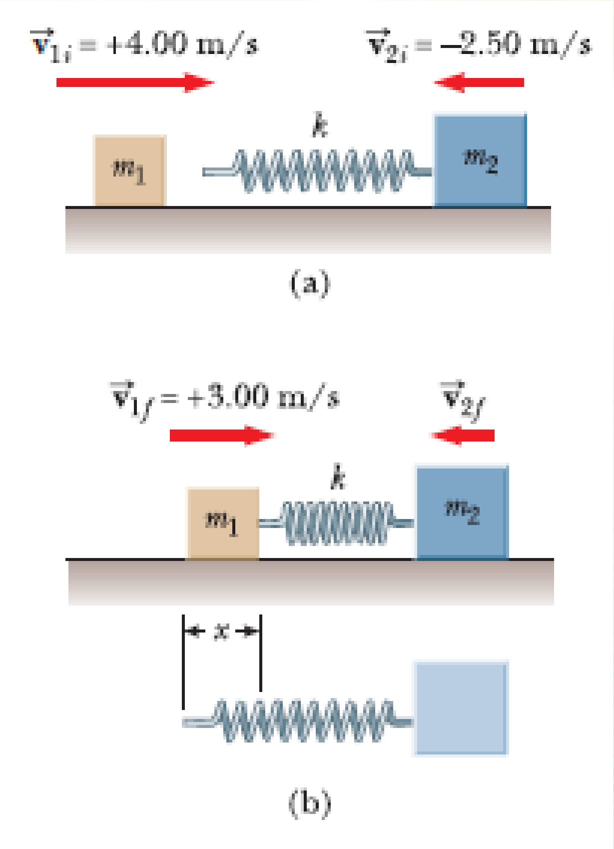
$$v_{2f}=\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}-m_1v_{1f}}{m_2}=-1.74\,m/s$$

(b) $E_i=E_f$

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2+0$$

$$=\tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2+\tfrac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore x=0.173m$$



스치는 충돌
(Glancing Collisions)

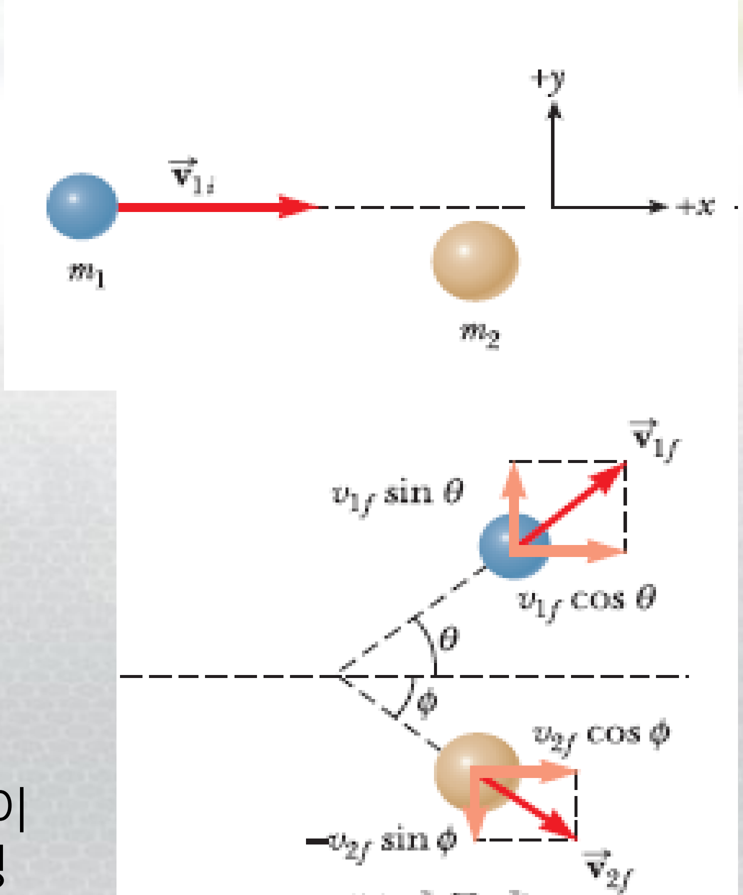
두 물체가 삼차원 공간에서 일반적인 충돌을 할 때 운동량 보존의 법칙은 계의 전체 운동량이 각 방향에서 보존되는 것을 뜻한다.

당구 같은 이차원 충돌을 가정하면

오른쪽 그림처럼 m_2가 정지해있는 경우

$$m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 + 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi$$



(b) 충돌 후

충돌이 탄성충돌인 경우, KE가 보존되므로

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

처음 속도 v_{1i}와 질량들을 알면 네 개의 미지수(v_{1f}, v_{2f}, θ, φ)가 남는다. 식이 세 개만 있으므로 네 개의 미지수 중 하나가 주어져야 충돌 후 운동을 결정할 수 있다.

예제 6.6 1500 kg의 승용차가 25.0 m/s의 속력으로 동쪽으로 달리다가 북쪽으로 20.0m/s의 속력으로 달리는 2500kg의 밴과 교차로에서 충돌하였다. 충돌 후 잔해물의 방향과 속도에 대한 크기를 구하라. 두 대의 자동차는 충돌 후에 서로 붙어 있다고 가정한다.

완전비탄성충돌이므로

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \cos\theta$$

$$m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \sin\theta$$

$$\sum p_{xi} = (1500\text{kg})(25.0\text{m/s}) = 3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\sum p_{xf} = (4000\text{kg}) v_f \cos\theta$$

$$(1) \qquad 3.75 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} = (4000\text{kg}) v_f \cos\theta$$

$$\sum p_{yi} = (2500\text{kg})(20.0\text{m/s}) = 5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\sum p_{yf} = (4000\text{kg}) v_f \sin\theta$$

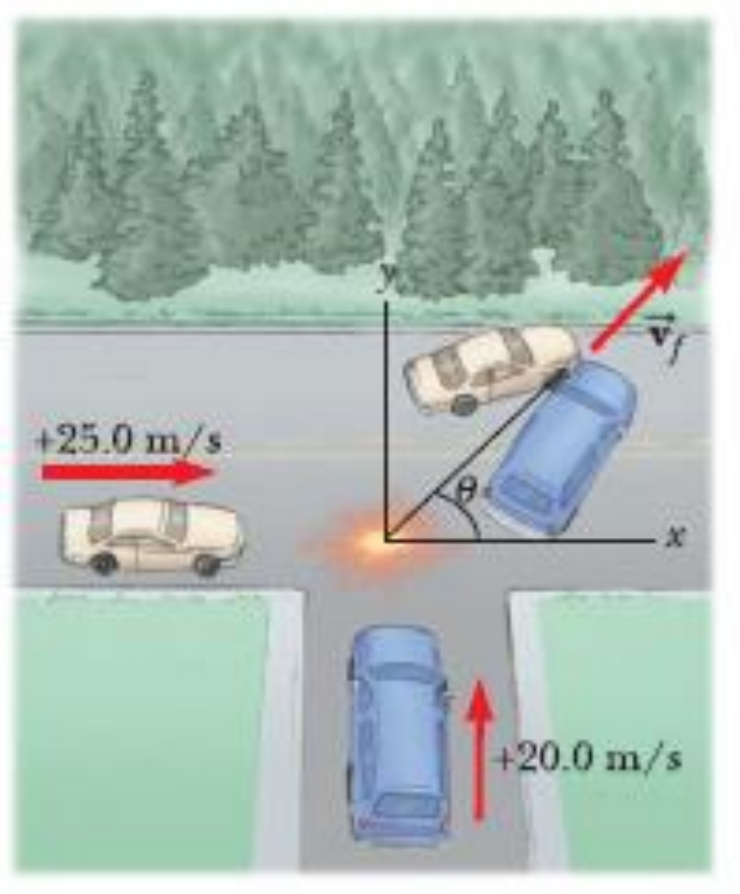
$$(2) \qquad 5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s} = (4000\text{kg}) v_f \sin\theta$$

(2)식을 (1)식으로 나누면

$$\frac{(4000\text{kg}) v_f \sin\theta}{(4000\text{kg}) v_f \cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ$$

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4 \text{kg} \cdot \text{m/s}}{(4000\text{kg}) \sin 53.1^\circ} = 15.6\text{m/s}$$



로켓의 추진
(Rocket Propulsion)

로켓의 작동 원리는 로켓과 분사된 연료로 구성된 계의 운동량 보존 법칙에 의존한다.

우주 공간에서의 추진을 고려해보자.

$$(M+\Delta m)v = M(v+\Delta v)+\Delta m(v-v_e)$$

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

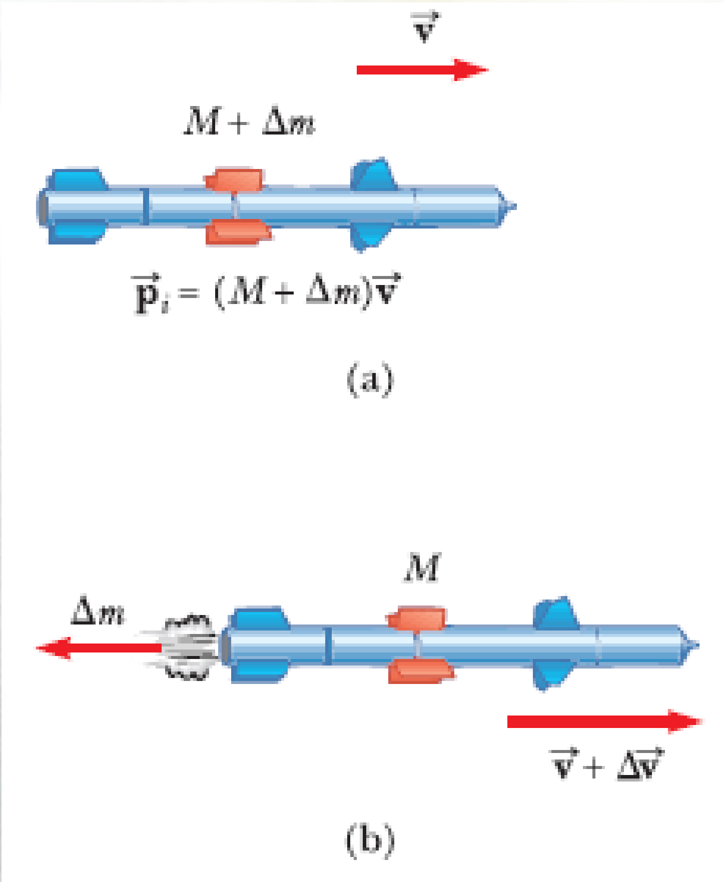
분사된 질량의 증가 △*m*은 로켓의 질량이 감소한 것과 같으므로 △*m*=-△*M*이다. △*M*은 질량의 감소를 나타내므로 음이다. 그래서 -△*M*은 양수이다.

$$Mdv = v_e dm = -v_e dM$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \qquad \therefore v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

로켓의 순간 추진력

$$\text{순간추진력} = \mathrm{Ma} = \mathrm{M}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \left| v_e \frac{\Delta M}{\Delta t} \right|$$



예제 6.7 질량이1.00×10⁵ kg이고 엔진, 외관과 유효 하중을 포함한 연료 소진 질량이 1.00×10⁴ kg인 로켓이 있다. 로켓이 지구로부터 발사되어 분출 속도가 $v_e=4.50\times10^3 m/s$로 일정하게 연료를 태우면서 4.00분 동안 연료 모두를 소진한다. (a) 공기 마찰과 중력을 무시할 때, 로켓의 연료 소진 추진 속력은 얼마인가? (b) 이륙 직후 로켓의 추진력은 얼마인가? (c) 중력을 고려할 때 로켓의 처음 가속도는 얼마인가? (d) 중력을 무시하지 않을 때 로켓의 연료 소진 속력을 추정하라.

(a) 연료 소진 속도 $v_f = v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) = 1.04\times10^4\,\mathrm{m/s}$

(b) 이륙 시 추진력 $\Delta M = M_f - M_i = -9.00\times10^4\,\mathrm{kg}$

$$\text{추진력} = \left|v_e \frac{\Delta M}{\Delta t}\right| = 1.69\times10^6\,\mathrm{N}$$

(c) 처음 가속도: $Ma = \sum F = T - Mg$ $\qquad a = \frac{T}{M} - g = 7.10\,\mathrm{m/s^2}$

(d) 연료 소진 속력: $\Delta v_g = -g\Delta t = -2.35\times10^3\,\mathrm{m/s}$

$$v_f = 1.04\times10^4 - 2.35\times10^3 = 8.05\times10^3\,\mathrm{m/s}$$

Home Work

1, 6, 11, 13, 23