# 직선과 평면의 방정식

# 직선과 평면의 방정식

- xy 평면에서 직선은 직선 위의 한 점과 직선의 방향 (기울기 또는 경사각)이 주어지면 결정된다.

- 이 경우 직선의 식은 점-기울기 형을 사용하여 구할 수 있다.

- 마찬가지로 삼차원 공간의 직선 L 은 L 위의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 L 의 방향을 알 때 결정된다. 삼차원에서 직선의 방향은 벡터에 의하여 편리하게 기술되므로 **v** 를 L 과 평행인 벡터라 하자.

# 직선과 평면의 방정식

- $P(x, y, z)$ 를 L 위의 임의의 점이라 하고, $\mathbf{r}_0$ 와 $\mathbf{r}$ 을 $P_0$ 와 $P$ 의 위치벡터 (즉, $\mathbf{r}_0$ 와 $\mathbf{r}$ 은 $\overrightarrow{OP_0}$ 와 $\overrightarrow{OP}$ 을 나타낸다)라 하자.

- 그림 1에서와 같이 $\mathbf{a}$ 를 그 표현이 $\overrightarrow{P_0P}$, 인 벡터라 하면, 벡터의 합에 관한 삼각형 법칙으로서, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$ 를 얻는다.

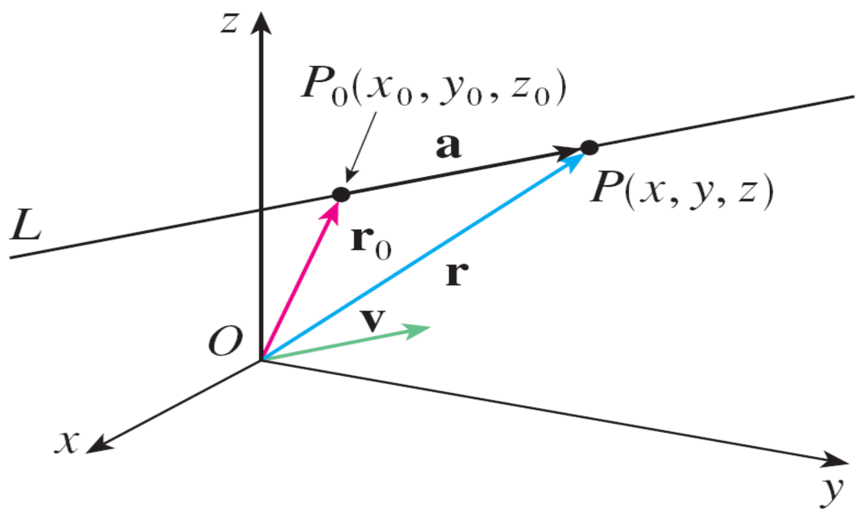


Figure 1

# 직선과 평면의 방정식

- 그런데, **a** 와 **v** 가 평행이므로 **a** = *t***v** 를 만족하는 스칼라 *t* 가 존재한다. 따라서 L 의 벡터방정식은

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}}$$

- 매개변수 *t* 의 값에 따라 직선 L 위의 점의 위치벡터 **r** 이 정해진다.

# 직선과 평면의 방정식

- 그림 2에서와 같이 $t$ 의 양수값에는 $P_0$ 의 한쪽에 놓여 있는 L 의 점들이 대응되지만, $t$ 의 음수값에는 $P_0$의 다른 한편에 놓여 있는 L 의 점들이 대응된다.

직선과 평면의 방정식

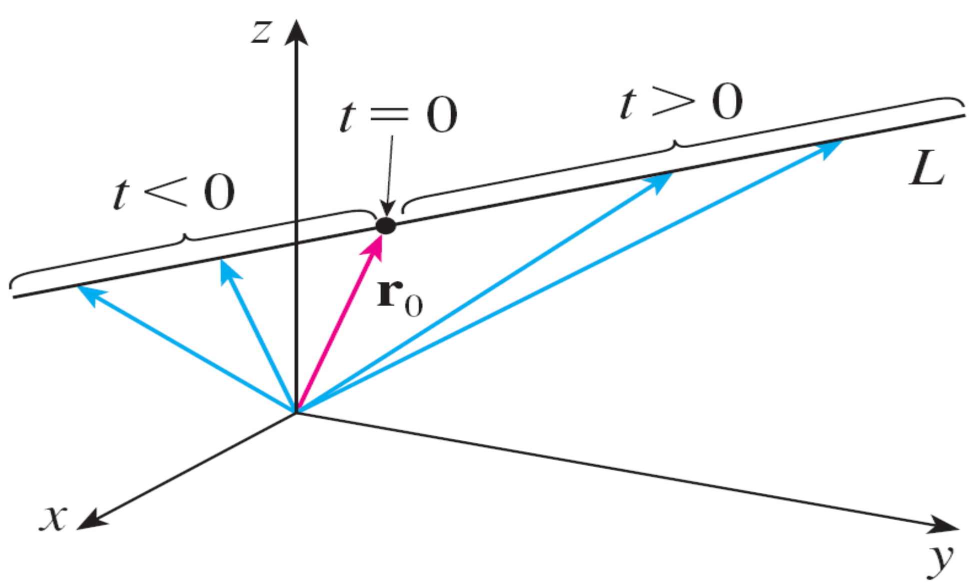


**Figure 2**

# 직선과 평면의 방정식

- L 의 방향을 정해주는 벡터 **v** 를 성분을 이용하여 $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, 와 같이 쓴다면, $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle$를 얻는다.

- 또 $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ 와 $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ 로 쓸 수 있으므로 벡터방정식 $\boxed{1}$ 은

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

- 가 된다. 두 벡터가 같은 필요충분조건은 대응하는 성분이 같은 것이다.

# 직선과 평면의 방정식

- 그러므로 $t \in \mathbb{R}$. 일 때 세 방정식을 얻는다:

**2** $$\boxed{x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct}$$

- 이들 방정식을 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 을 지나고, 벡터 $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$에 평행인 직선 L 의 매개방정식이라 부른다.

- 매개변수 $t$ 의 각 값은 L 의 점 $(x, y, z)$ 를 정해준다.

# *예제 1*

**(a)** 점 (5, 1, 3) 을 지나고 벡터 **I** + 4**j** – 2**k**에 평행인 직선의 벡터방정식과 매개방정식을 구하여라.

**(b)** 직선 위의 다른 두 점을 구하여라.

- Solution:

**(a)** $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ and $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 이므로 벡터방정식 $\boxed{1}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

# 예제 1

매개방정식은 다음과 같다

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

**(b)** 매개변수의 값을 $t = 1$ 로 택하면 $x = 6$, $y = 5$, $z = 1$, 이므로 (6, 5, 1) 이 직선 위에 대응하는 점이다.

마찬가지로 $t = -1$ 로부터 점 (4, −3, 5)를 얻는다.

# 직선과 평면의 방정식

- 직선의 벡터방정식과 매개방정식은 유일한 것은 아니다. 점이나 매기변수를 바꾸거나 평행인 다른 벡터를 택하면 방정식은 달라진다.

- 예를 들어 예제 1에서 (5, 1, 3) 대신에 (6, 5, 1) 를 택하면 직선의 매개방정식은 다음과 같다.

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

# 직선과 평면의 방정식

- 또 점(5, 1, 3) 을 그대로 두는 대신에 평행인 벡터 **2i** + **8j** – **4k** 을 택하면 방정식은 다음과 같이 된다.

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

- 일반적으로, 벡터 $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ 가 직선 $L$,의 방향을 묘사하는 데 이용될 때 수 $a$, $b$, $c$ 를 직선 $L$ 의 방향수 **(direction numbers)** 라 부른다.

- **v** 와 평행인 벡터는 어느 것이나 이용될 수 있으므로, $a$, $b$, $c$ 와 비례하는 세 수도 $L$의 방향수로 이용될 수 있음을 알 수 있다.

# 직선과 평면의 방정식

- 직선 *L* 을 묘사하는 다른 방법은 방정식 2에서 매개변수 *t* 를 소거하는 것이다.

- *a*, *b*, *c* 중 어느 하나도 0이 아니면 각 방정식을 *t*에 관해 풀 수 있으므로 결과를 같게 놓으면 다음을 얻는다.

$$\boxed{3} \qquad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

- 이 방정식을 *L* 의 대칭방정식 (**symmetric equations)** 이라 부른다.

# 직선과 평면의 방정식

- 방정식 3의 분모에 나타난 수 *a*, *b*, *c* 가 *L*,의 방향수 (즉, *L* 과 평행인 벡터의 성분)임을 주목하여라.

- *a*, *b*, *c* 중 어느 하나가 0인 경우에도 역시 *t*를 소거할 수 있다. 예를 들면 $a = 0$ 일 때 *L* 의 방정식은 다음과 같다.

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- 이것은 *L* 이 수직평면 $x = x_0$위에 놓여 있음을 의미한다.

# 직선과 평면의 방정식

- 일반적으로 벡터 $\mathbf{r}_0$ 의 끝점을 지나고 방향이 벡터 $\mathbf{v}$ 인 방정식은 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$이다.

- 만일 직선이 벡터 $\mathbf{r}_1$, 의 끝점도 지나면 직선의 방향은 $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ 이고, 벡터방정식은 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

- $\mathbf{r}_0$ 에서 $\mathbf{r}_1$ 로의 선분은 크기가 $0 \le t \le 1$인 매개변수 $t$를 이용하여 표현된다.

**4** The line segment from $\mathbf{r}_0$ to $\mathbf{r}_1$ is given by the vector equation

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

# 평면

- 비록 공간에 있는 직선이 점과 방향에 의하여 결정된다 하더라도 공간에 있는 평면은 설명하기가 조금 더 힘들다.

- 평면에 평행인 한 벡터는 평면의 방향을 나타내기에는 불충분하다. 그러나 평면에 수직인 벡터는 평면의 방향을 완벽하게 나타낸다.
- 따라서 공간에서 평면은 평면 위의 한 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 이 평면에 수직인 벡터 **n** 에 의하여 결정된다. 이 때 벡터 **n** 을 법선벡터 (**normal vector**) 라 부른다.

# 평면

- $P(x, y, z)$ 를 평면 위의 임의의 점이라 하고, $\mathbf{r}_0$ 와 $\mathbf{r}$ 을 $P_0$ 와 $P$의 위치벡터라 하면 벡터 $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ 은 $\overrightarrow{P_0P}$. 로 표현된다.

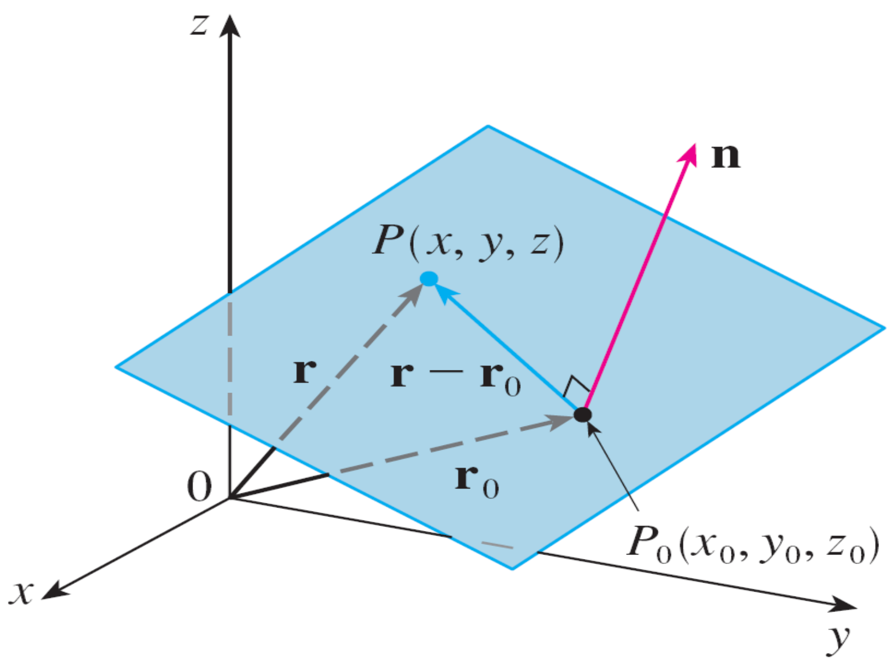


**Figure 6**

# 평면

- 법선벡터 **n** 은 주어진 평면 위의 모든 벡터와 수직이다. 특히 **n** 은 **r** – **r**$_0$ 와 수직이므로,

**5**
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

- 를 얻게 되는데 이것은

**6**
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

- 와 같이 고쳐쓸 수 있다. 방정식 5 또는 6을 평면의 벡터 방정식 **(vector equation of the plane)** 이라 부른다.

# 평면

- 평면에 대한 스칼라 방정식을 얻기 위하여, $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. 이라 하면 벡터방정식 5는

$$\boxed{5} \qquad \langle a, b, c \rangle \bullet \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

또는

$$\boxed{7} \qquad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

이 된다. 방정식 7은 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고, 법선벡터가 $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$인 평면의 스칼라 방정식이다.

# 예제 4

- 점 (2, 4, −1) 을 지나고 법선벡터가 $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ 인 평면의 방정식, 좌표축과 만나는 점, 그래프 개형.

- Solution:

- $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $z_0 = -1$ 라 두면, 평면의 방정식은

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

또는

$$2x + 3y + 4z = 12$$

- $x$-축과의 교점의 절편을 구하기 위하여 이 방정식에서 $y = z = 0$ 이라 놓으면 $x = 6$.

# 예제 4

- 마찬가지로 $y$-절편은 4, $z$-절편은 3. 이것으로 이 평면의 제1팔분공간에 놓여 있는 부분을 그릴 수 있다.

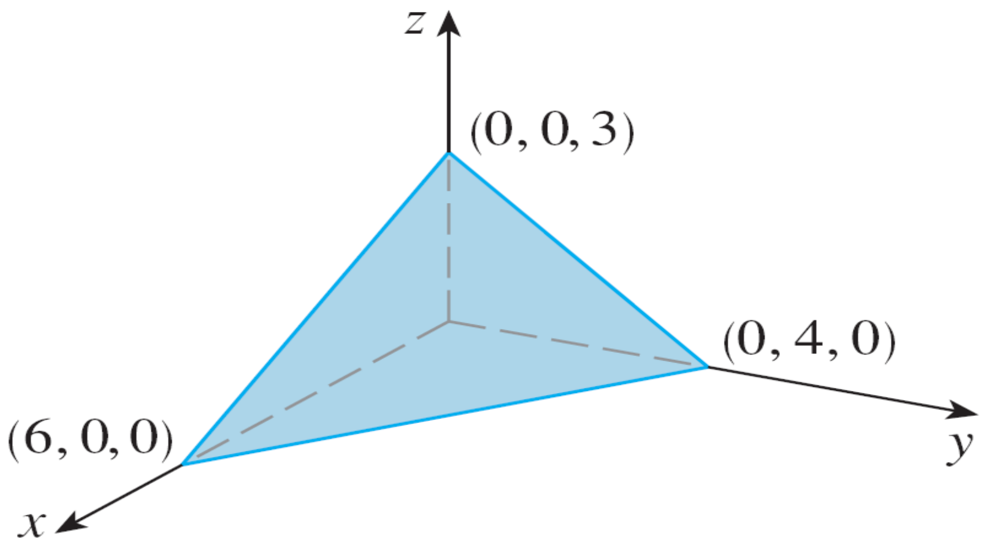


**Figure 7**

# 평면

- 예제 4에서 한 것과 같이 방정식 7 의 항을 묶으면, 평면의 방정식은 $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$일 때

**8**

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

- 방정식 8을 $x$, $y$, $z$ 에 대한 선형방정식 **(linear equation)** 이라 부른다. 역으로 $a$, $b$, $c$ 가 모두는 0이 아닐 때, 선형방정식 $\boxed{8}$ 은 법선벡터가 $\langle a, b, c\rangle$인 평면을 나타낸다.

# 평면

- 두 평면은 법선벡터가 평행일 때 평행 **(parallel)** 이다.

- 예를 들면 평면 $x + 2y - 3z = 4$ 와 $2x + 4y - 6z = 3$ 은 법선벡터가 $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ 과 $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ 이고 $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$이므로 평행이다.

- 두 평면이 평행이 아니면 한 직선에서 만나고, 두 평면 사이의 각은 법선벡터 사이의 예각으로 정의된다. (각 $\theta$ 는 그림 참조)

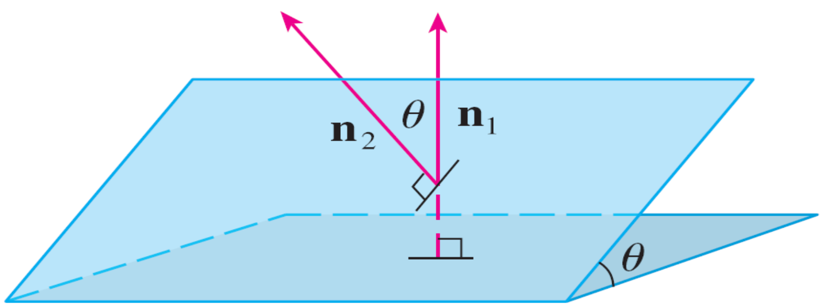

**Figure 9**

# 9.5 연습문제

- 1,3,7,10,12,16,21,23,26,29,31,33,38,41,43,45,47