

시스템안전공학 07

시스템 신뢰도

박재희



학습목표

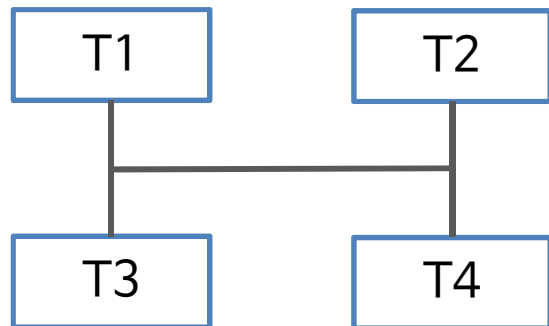
- 신뢰성 블록도를 작성할 수 있다.
- 다양한 신뢰성 블록도의 신뢰도 계산을 할 수 있다.
- 지수부품의 경우 직렬, 병렬, 대기체계 연결 시 평균 수명의 변화를 이해한다.

1. 시스템신뢰도 구조

신뢰도 구조

■ 신뢰성 블록도

- 부품들 간의 논리적 연결구조 (물리적 연결구조가 아님)를 부품과 연결 선에 의해 표현하는 것
- (예) 자동차 네바퀴는 병렬로 연결된 것 처럼 보이나 신뢰성 블록도에서는 직렬연결이다.



물리적 연결
(병렬과 직렬)



신뢰성블록도
논리적 연결
(직렬)

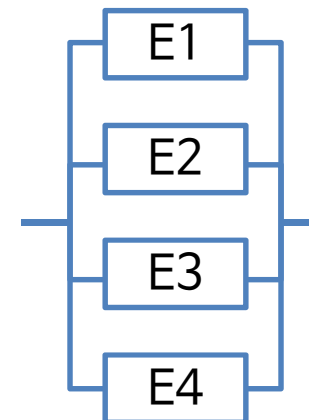
직렬연결과 병렬연결의 신뢰도



타이어의 신뢰도



엔진의 신뢰도

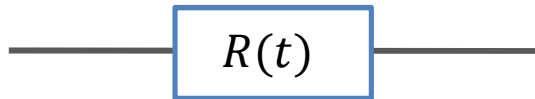


신뢰도 구조의 종류

- 직렬체계(serial system) 연결
- 병렬체계(parallel system) 연결
- 대기체계(standby system) 연결
- n 중 k 구조 연결
- 교차구조 연결

부품 1개

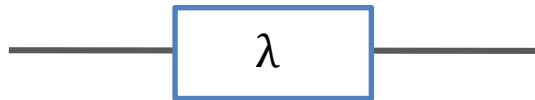
■ 부품 1 개



- $f(t)$
- $F(t) = \int_0^t f(t)dt$
- $R(t) = 1 - F(t)$
- $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$
- $E(T) = M TTF = \int_0^\infty R(t)dt$

지수부품 1개

■ 지수부품 1 개 (고장률 λ)



- $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
- $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $R(t) = e^{-\lambda t}$
- $\lambda(t) = \lambda$
- $E(T) = M TTF = \frac{1}{\lambda}$

직렬체계

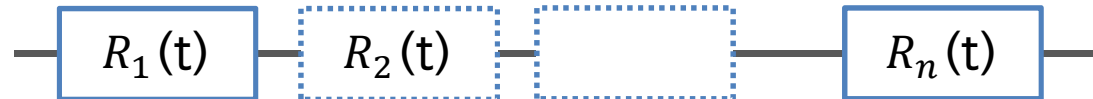
■ 직렬연결

- 2개 직렬



$$R_s(t) = P(T > t) = P(T_1 > t \text{ and } T_2 > t) = P(T_1 > t) \times P(T_2 > t) \\ = R_1(t)R_2(t)$$

- n개 직렬



$$R_s(t) = R_1(t)R_2(t) \cdots R_n(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \\ = e^{-\int_0^t \lambda_1(t)dt} e^{-\int_0^t \lambda_2(t)dt} \cdots e^{-\int_0^t \lambda_n(t)dt} = e^{-\int_0^t \sum \lambda_i(t)dt}$$

$$R_s(t) = e^{-\int_0^t \lambda_s(t)dt} = e^{-\int_0^t \sum \lambda_i(t)dt}$$

$$\therefore R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t), \lambda_s(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$$

- 즉, 시스템신뢰도는 개별부품 신뢰도의 곱, 시스템고장률은 개별부품 고장률의 합

지수부품 2개 직렬체계

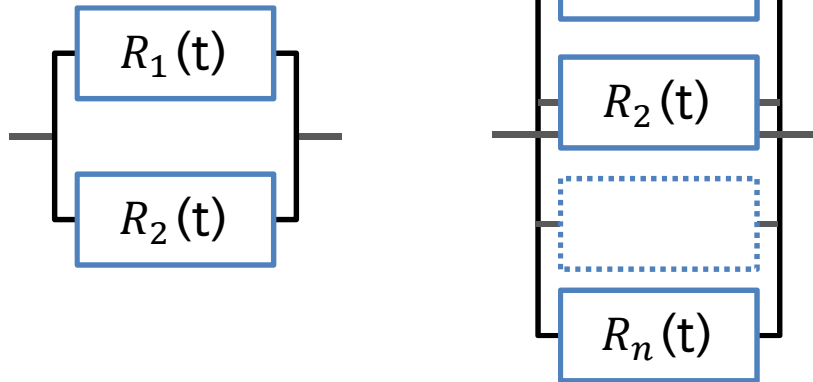
■ 동일 지수부품 2 개 직렬연결



- $R(t) = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}$
- $F(t) = 1 - e^{-2\lambda t}$
- $f(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}$
- $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{2\lambda e^{-2\lambda t}}{e^{-2\lambda t}} = 2\lambda$ (상수 고장률 → 지수분포)
- $E(T) = M TTF = \frac{1}{2\lambda} = 0.5 \frac{1}{\lambda}$
- 동일 지수부품 직렬2개 연결 시 평균 수명은 1개부품에 비해 0.5배가 된다.

병렬체계

■ 병렬연결



• 2개 병렬

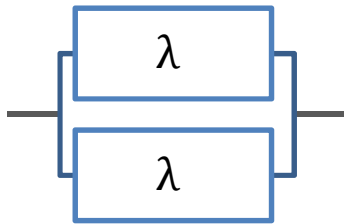
$$\begin{aligned} R_s(t) &= P(T > t) = P(T_1 > t \text{ or } T_2 > t) \\ &= P(T_1 > t) + P(T_2 > t) - P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \\ &= R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \end{aligned}$$

• n개 병렬

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t))$$

지수부품 2개 병렬체계

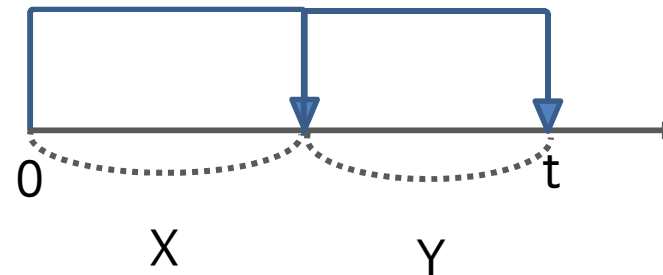
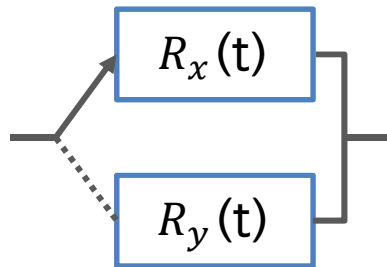
▪ 동일 지수부품 2 개 병렬연결



- $R(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
- $F(t) = 1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}$
- $f(t) = 2\lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t}$
- $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{2\lambda e^{-\lambda t} - 2\lambda e^{-2\lambda t}}{2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - 0.5e^{-\lambda t}}$ (지수분포 아님)
- $E(T) = MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} dt$
$$= \left[-\frac{2}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} = 1.5 \frac{1}{\lambda}$$
- 동일 지수부품 병렬2개 연결 시 평균 수명은 1.5 배가 된다.

대기체계

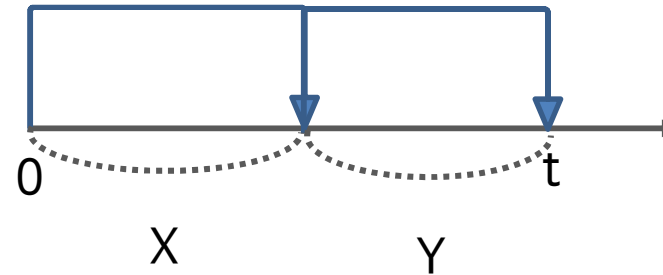
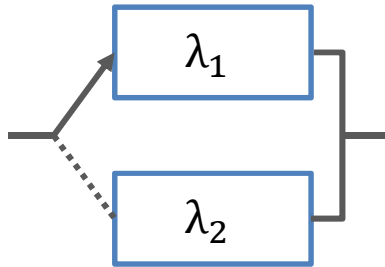
■ 대기체계연결



- 각 부품 수명의 *pdf* 와 *cdf* : X부품 $f_x(x)F_x(x)$, Y부품 $f_y(y)F_y(y)$
- $T = X + Y$ 결합확률분포
- $F_s(t) = P(T < t) = P(X + Y < t) = \int_0^t \int_0^{t-x} f_{x,y}(x,y) dy dx = \int_0^t \int_0^{t-x} f_x(x) f_y(y) dy dx$ (X, Y 서로 독립)
 $= \int_0^t [\int_0^{t-x} f_y(y) dy] f_x(x) dx = \int_0^t F_y(t-x) f_x(x) dx$
- $f_s(t) = \int_0^t f_y(t-x) f_x(x) dx$

고장률 다른 지수부품 2개 대기체계

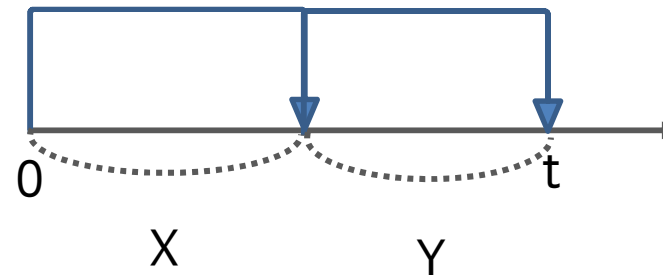
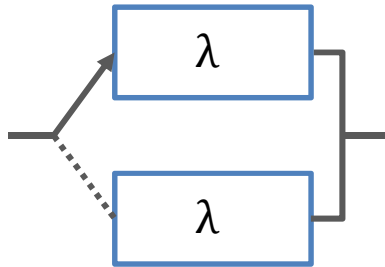
■ 대기체계연결 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$ 상이한 경우)



$$\begin{aligned}
 \bullet F_S(t) &= \int_0^t (1 - e^{-\lambda_2(t-x)}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\
 &= \lambda_1 \int_0^t e^{-\lambda_1 x} dx - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx \\
 &= [-e^{-\lambda_1 x}]_0^t + \left[\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} \right]_0^t \\
 &= 1 - e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\
 \bullet R_S(t) &= e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})
 \end{aligned}$$

고장률 동일 지수부품 2개 대기체계

- 대기체계연결 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 동일한 경우)

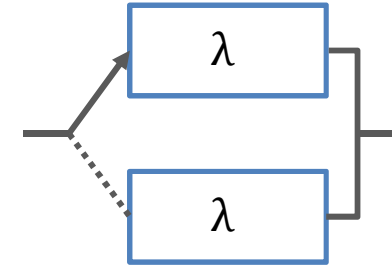


- 만일 n 개의 동일 지수부품이 대기구조를 이루면 시스템신뢰도는 $n-1$ 개 이하의 부품만이 고장날 확률
- $R_s(t) = \sum_{m=0}^{n-1} Po(m, t) = e^{-\lambda t} \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$
- 동일지수부품 2개인 경우 0, 1개 고장까지는 문제없으므로
- $R_s(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$

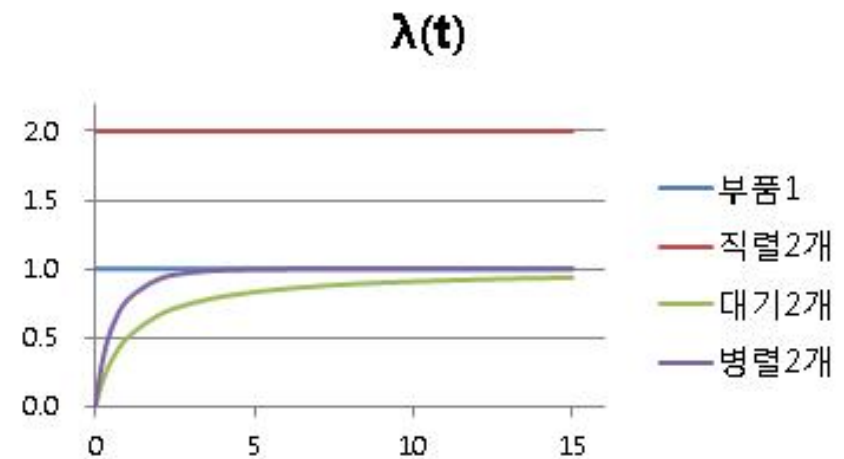
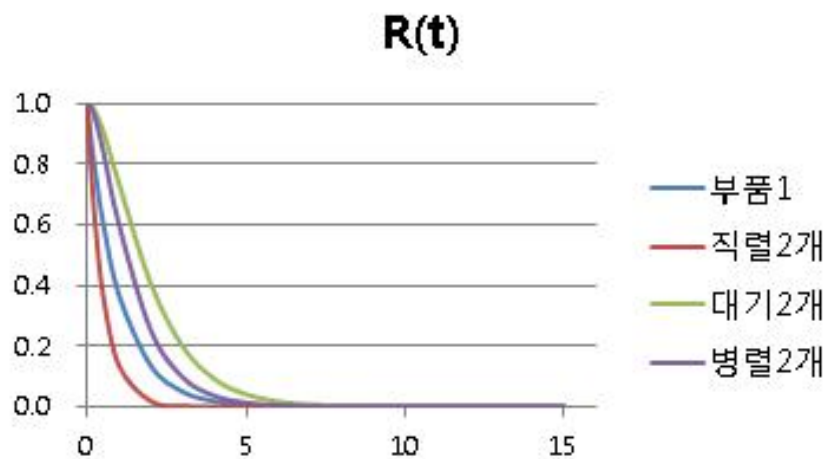
동일 지수부품 대기체계

■ 동일 지수부품 2 개 대기체계연결

- $R(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$
- $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)$
- $f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$
- $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} (1 + \lambda t)} = \frac{\lambda^2 t}{(1 + \lambda t)}$
- $E(T) = M TTF = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt + \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt$
$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \lambda t \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda}$$
- 동일 지수부품 대기체계 2 개 연결 시 평균수명은 2 배가 된다.

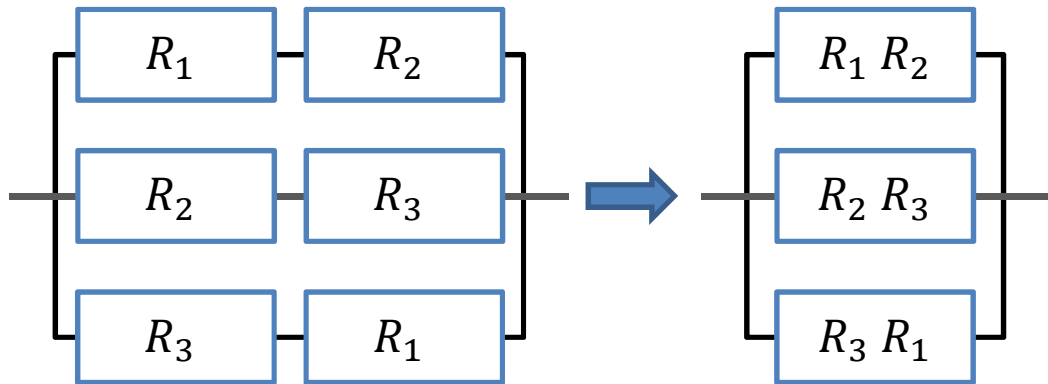


2개의 동일지수부품의 신뢰도와 고장률



n 중 k구조 체계

- n중 k구조: n개 중 k개 이상 작동하면 정상
 - 실제 부품 n개이나 신뢰성블록도에서는 $\binom{n}{k} \times k$ 개의 블록 표시
 - 3중 2구조체계: $\binom{3}{2} \times 2 = 3 \times 2$ 행렬로 표시

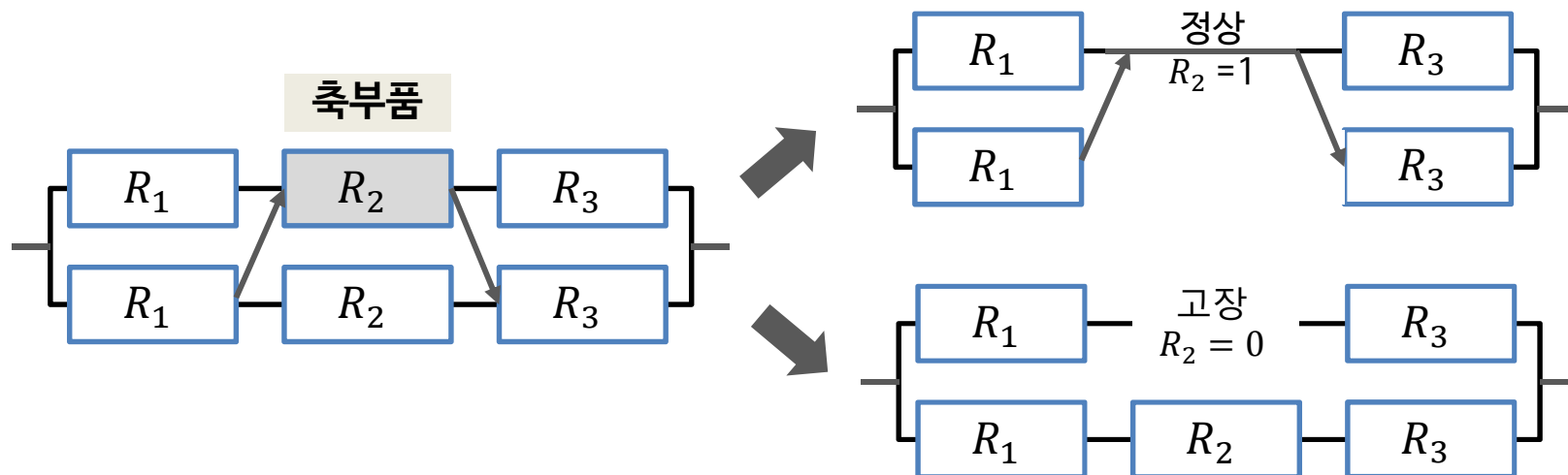


- $R_s = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 - (R_1 R_2 R_3) - (R_2 R_3 R_1) - (R_3 R_1 R_2) + (R_1 R_2 R_3 R_1 R_2 R_3) = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 - 2R_1 R_2 R_3$
- $R_s = 3R^2 - 2R^3$ (If $R_1 = R_2 = R_3 = R$)

교차결합 구조체계

■ 교차결합구조

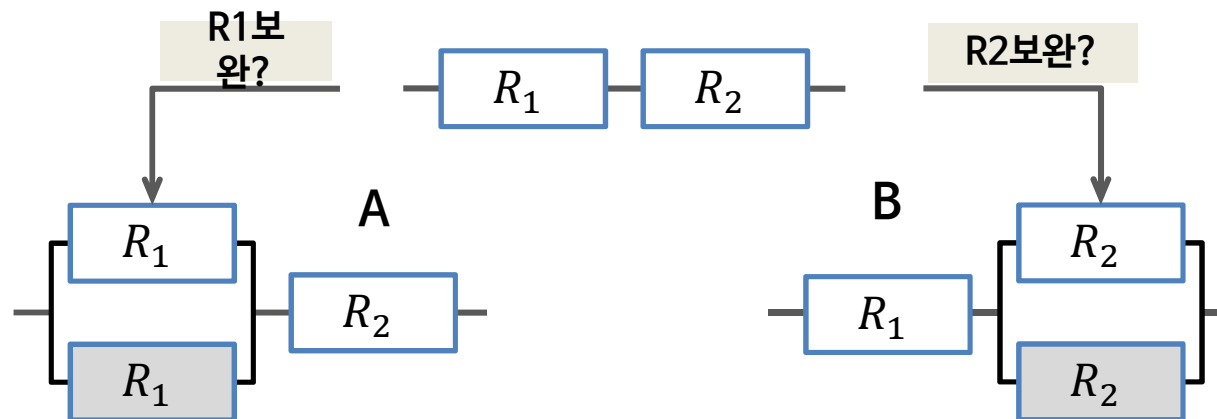
- 신뢰성블럭도에서 축(key)부품을 정한 후, 축 부품이 정상인 경우와 고장인 경우로 나누어 신뢰도를 계산 (정상은 부품을 축부품지우고 선으로 연결(우선권 있음), 고장은 부품을 지우고 절단)



- 축부품 정상 $R_0 = (2R_1 - R_1^2)(2R_3 - R_3^2)$
- 축부품 고장 $R_x = R_1R_2R_3$
- 시스템신뢰도 $R_s = R_2R_0 + (1 - R_2)R_x$

중복설계원칙1

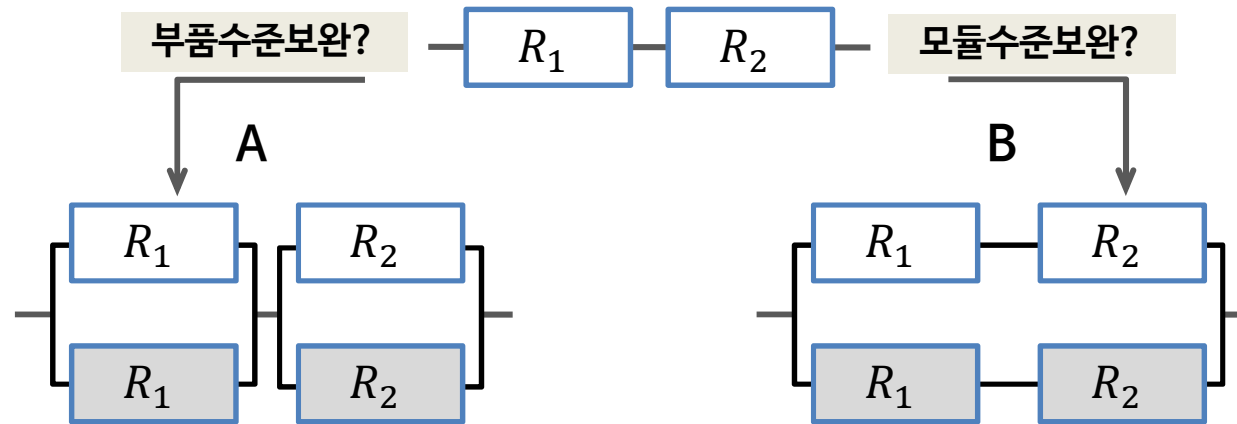
- 시스템신뢰도 효과적으로 높이기 위해 신뢰도가 낮은 부품부터 중복설계 한다. ($R_2 > R_1$)



- $R_A = (1 - (1 - R_1)^2)R_2 = (2R_1 - R_1^2)R_2$
- $R_B = (1 - (1 - R_1)^2)R_2 = (2R_2 - R_2^2)R_1$
- $R_A - R_B = (2R_1 - R_1^2)R_2 - (2R_2 - R_2^2)R_1 = 2R_1R_2 - R_1^2R_2 - 2R_1R_2 + R_2^2R_1 = R_1R_2(R_2 - R_1) > 0$
- $\therefore R_A > R_B$ 즉 신뢰도가 낮은 R_1 부터 보강하는 것이 더 효과적이다

중복설계원칙2

- 시스템신뢰도 효과적으로 높이기 위해 부품수준에서 중복설계 한다.



- $$R_A = (1 - (1 - R_1)^2) (1 - (1 - R_2)^2)$$

$$= (2R_1 - R_1^2)(2R_2 - R_2^2) = 4R_1R_2 - 2R_1R_2^2 - 2R_1^2R_2 + R_1^2R_2^2$$
- $$R_B = 1 - (1 - R_1R_2)^2 = 2R_1R_2 - R_1^2R_2^2$$
- $$R_A - R_B = 2R_1R_2 - 2R_1R_2(R_1 + R_2) + 2R_1^2R_2^2$$

$$= 2R_1R_2(1 - R_1 - R_2 + R_1R_2)$$

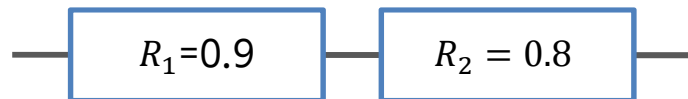
$$= 2R_1R_2(1 - R_1)(1 - R_2) \geq 0$$

$\therefore R_A \geq R_B$ 두 부품을 중복한다면 A 처럼 부품 수준에서 하는 것이 효과적이다

2. 시스템신뢰도 계산

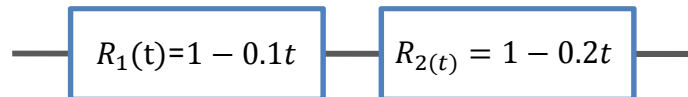
직렬체계의 신뢰도 계산

- 부품의 신뢰도 숫자로 주는 경우



- $R_s = 0.9 \times 0.8 = 0.72$

- 신뢰도 함수로 주는 경우



- $t = 1\text{년 } R_s = 0.9 \times 0.8 = 0.72$

- $t = 2\text{년 } R_s = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

- 고장률 함수로 주는 경우

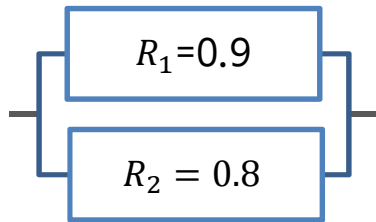


- $t = 1\text{년 } R_s = e^{-1} \times e^{-2} = e^{-3}$

- $t = 2\text{년 } R_s = e^{-2} \times e^{-4} = e^{-6}$

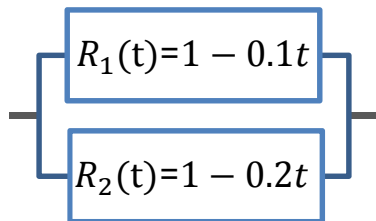
병렬체계의 신뢰도 계산

- 부품의 신뢰도 숫자로 주는 경우



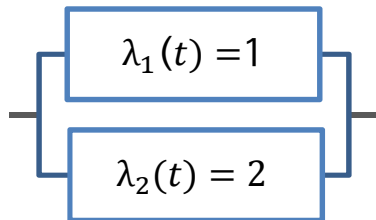
- $$R_s = 1 - (1 - 0.9)(1 - 0.8)$$
$$= 1 - 0.02 = 0.98$$

- 신뢰도 함수로 주는 경우



- $t = 1\text{년 } R_s = 1 - (1 - 0.9)(1 - 0.8) = 0.98$
- $t = 2\text{년 } R_s = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.6) = 0.92$

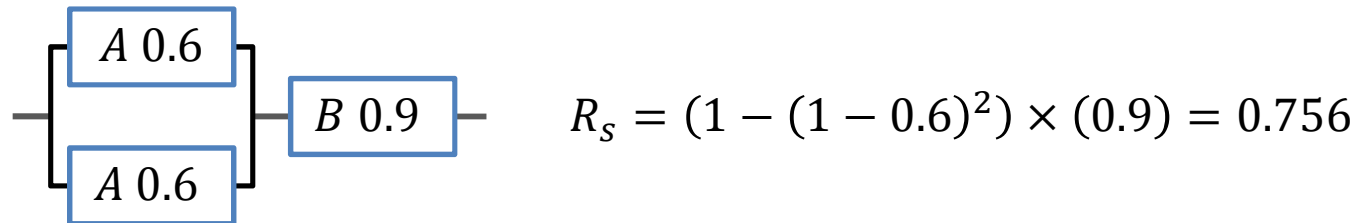
- 고장률 함수로 주는 경우



- $t = 1\text{년 } R_s = 1 - (1 - e^{-1})(1 - e^{-2})$
$$= e^{-1} + e^{-2} - e^{-3} = 0.453$$
- $t = 2\text{년 } R_s = 1 - (1 - e^{-2})(1 - e^{-4})$
$$= e^{-2} + e^{-4} - e^{-6} = 0.151$$

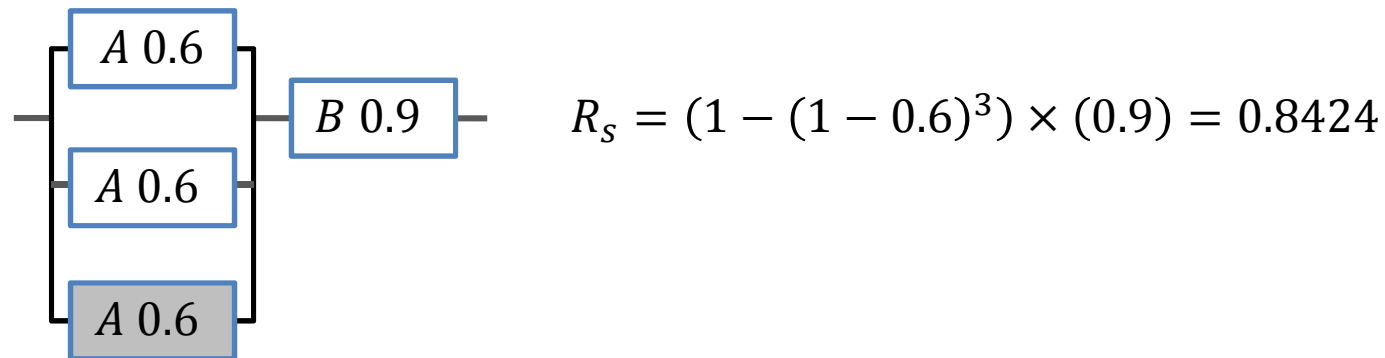
직병렬구조

- 다음 시스템의 신뢰도는?



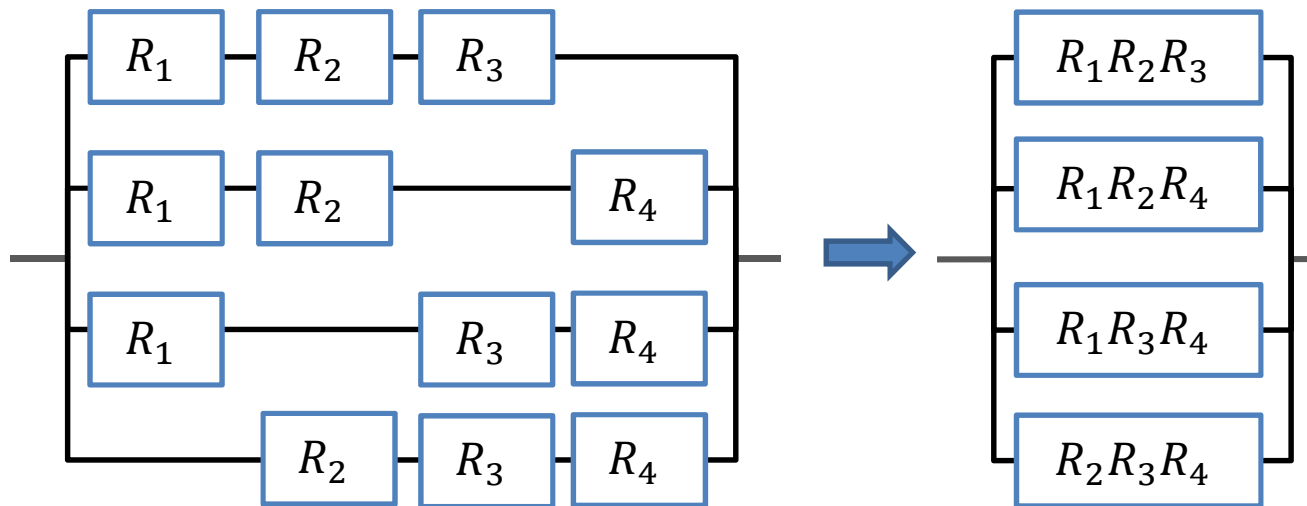
- 부품 A, B 중 하나를 추가해 시스템의 신뢰도를 최대화 하려면?

- 두개 병렬 A의 신뢰도 $1 - (1 - 0.6)^2 = 0.84$ 로 여전히 B 보다 낮음
- 따라서 신뢰도 낮은 A를 보완



4 중 3구조 신뢰도 계산

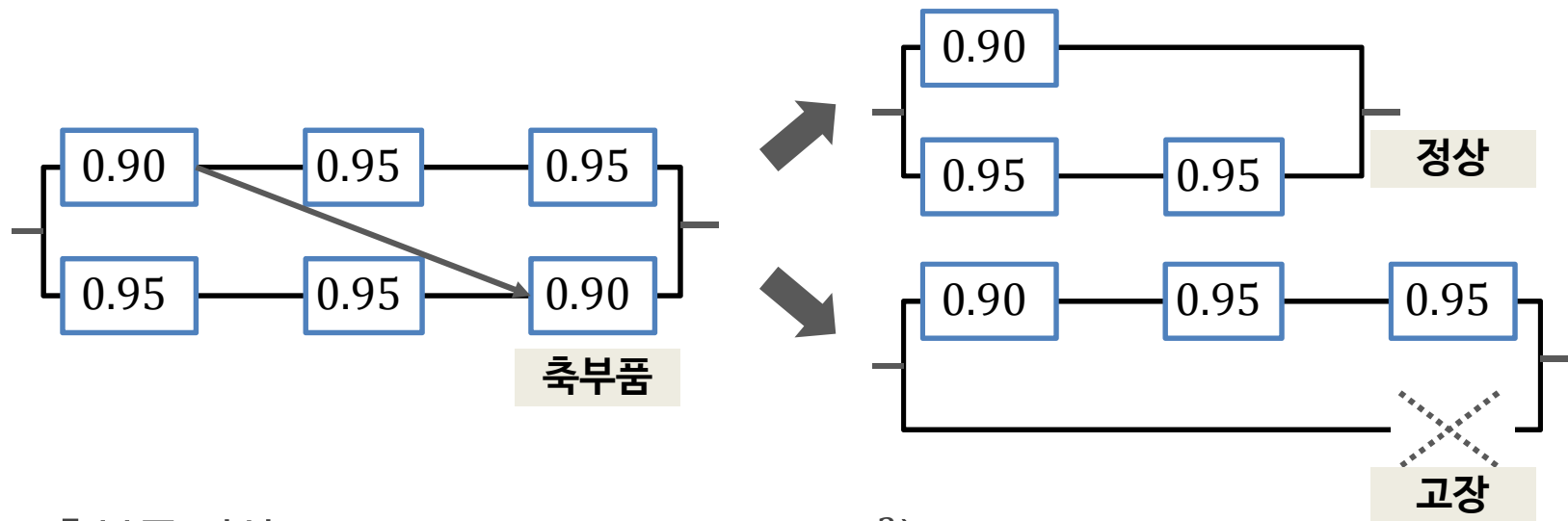
- 원자력발전소의 제어계측 시스템은 4중 3구조로 운영된다. 3개 이상이 정상작동 되면 시스템은 계속 가동하고, 고장난 1 개는 그 사이 수리 교체한다. 2 개 이상이 고장나면 시스템은 작동 중지된다. $R=0.9$ 인 동일센서가 4중 3구조로 운영된다면 이 시스템의 신뢰도는?



$$\bullet R_s = 4R^3 - 6R^4 + 4R^4 - R^4 = 4R^3 - 3R^4 = 4 \times 0.9^3 - 3 \times 0.9^4 = 0.9477$$

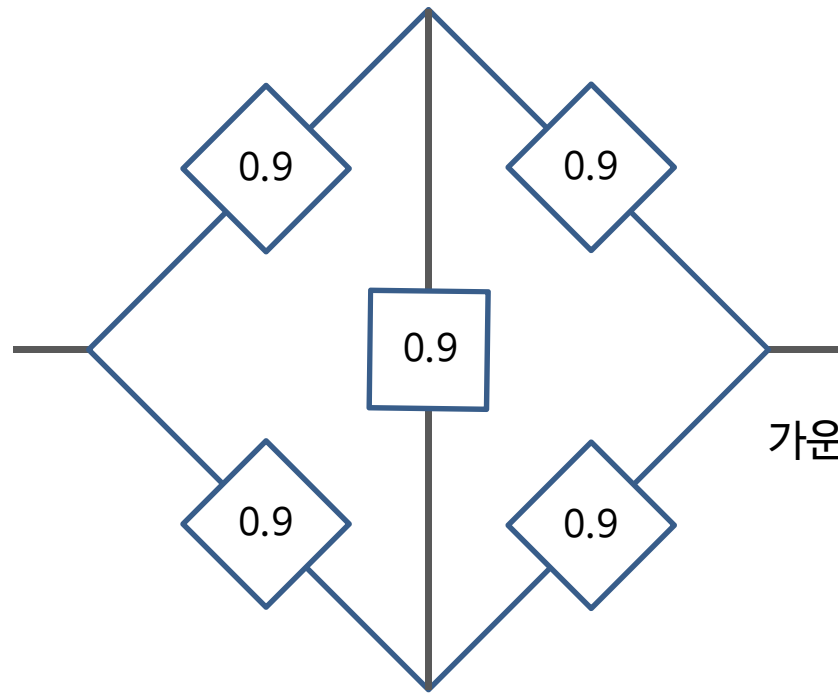
교차결합구조 신뢰도 계산

- 다음 교차결합구조에 대한 시스템신뢰도를 구하시오.
 - 우측하단 부품을 축부품으로 지정

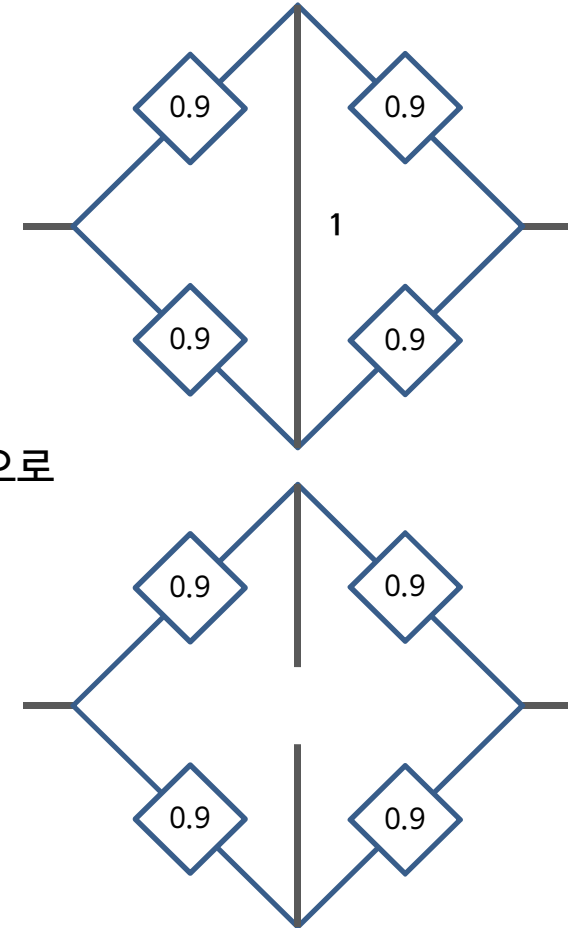


- 축부품 정상 $R_o = 1 - (1 - 0.9)(1 - 0.95^2) = 0.9903$
- 축부품 고장 $R_x = 0.90 \times 0.95 \times 0.95 = 0.8123$
- 시스템신뢰도 $R_s = R_{KEY}R_o + (1 - R_{KEY})R_x$
 $= 0.9 \times 0.9903 + 0.1 \times 0.8123 = 0.9725$

브리지 구조의 신뢰도

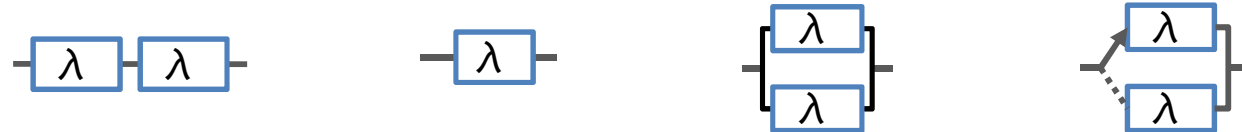


가운데 부품을 축부품으로



- $R_o = (1 - (1 - 0.9)^2)^2 = 0.9801$
- $R_x = 1 - (1 - 0.9 \times 0.9)^2 = 0.9639$
- $R_s = 0.9 \times R_o + 0.1 \times R_x = 0.9785$

요약



동일지수부품	2개 직렬	1개	2개 병렬	2개 대기
고장률 $\lambda(t)$	2λ	λ	$\lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - 0.5e^{-\lambda t}}$	$\frac{\lambda^2 t}{1 + \lambda t}$
분포	지수분포	지수분포	고장률 증가	고장률 증가
신뢰도 $R(t)$	$e^{-2\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$	$2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$	$e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$
평균수명 (MTTF)	$1/2\lambda$	$1/\lambda$	$3/2\lambda$	$2/\lambda$
1개 대비 수명증가	0.5배	1배	1.5배	2배
동일지수부품	n개 직렬	1개	n개 병렬	n개 대기
평균수명 (MTTF)	$1/(n\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$	n/λ