제4장 포트폴리오 이론-part 2

2. 포트폴리오의 기초 개념

1. 포트폴리오를 구성하는 이유

- 위험을 줄이고자 분산투자하는 것을 뜻함.

2. 공분산과 상관계수

(1) 공분산(Covariance) 구하기(두 자산의 편차를 곱하여 계산)

미래상황	확률	A자산 수익률	B자산 수익률
불황	50%	6%	5%
호황	50%	10%	15%

미래상황	확률	자산 A 수익률 편차	자산 B 수익률 편차
불황	50%	6% - 8%(*1) = -2%	5% - 10%(*2) = -5%
호황	50%	10% - 8%(*1) = 2%	15% - 10%(*2) = 5%

(*1) A자산 기대수익률 = E(RA) = 0.5×6%+0.5×10% = 8%
(*2) B자산 기대수익률 = E(RB) = 5%×50%+15%×50% = 10%
자산 A와 자산 B의 공분산 $Cov(\widetilde{R}_A, \widetilde{R}_B)$ = 불황 시 편차의 곱×불황실 확률+호황 시 편차의 곱×호황시 확률
= (6%-8%)×(5%-10%)×0.5+(10%-8%)×(15%-10%)×0.5 = 0.001

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(1) 공분산(Covariance) 구하기(두 자산의 편차를 곱하여 계산)

미래상황	확률	A자산 수익률	B자산 수익률
불황	50%	6%	5%
호황	50%	10%	15%

미래상황	확률	자산 A 수익률 편차	자산 B 수익률 편차
불황	50%	6% − 8%(*1) = −2%	5% − 10%(*2) = −5%
호황	50%	10% − 8%(*1) = 2%	15% − 10%(*2) = 5%

미래상황	확률	수익률 편차A × 수익률 편차B
불황	50%	−2% × −5% = 0.001
호황	50%	2% × 5% = 0.001

∴ 자산 A와 자산 B의 공분산 $Cov(\widetilde{R}_A, \widetilde{R}_B) = \sigma_{AB}$

= 불황 시 편차의 곱 × 불황 시 확률 + 호황 시 편차의 곱 × 호황 시 확률

$= 0.001 \times 0.5 + 0.001 \times 0.5 = \underline{0.001}$

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(2) 공분산의 의미

미래상황	확률	C자산 수익률	D자산 수익률
불황	50%	6%	15%
호황	50%	10%	5%

미래상황	확률	자산 C 수익률 편차	자산 D 수익률 편차
불황	50%	6% − 8%(*1) = −2%	15% − 10%(*2) = 5%
호황	50%	10% − 8%(*1) = 2%	5% − 10%(*2) = −5%

(*1) 자산 C 기대수익률 = $E(R_A)$ = 6%×0.5 + 10%×0.5 = 8%

(*2) 자산 D 기대수익률 = $E(R_B)$ = 15%×0.5 + 5%×0.5 = 10%

미래상황	확률	자산 C 수익률 편차 × 자산 D 수익률 편차
불황	50%	−2% × 5% = −0.001
호황	50%	2% × −5% = −0.001

∴ 자산 C와 자산 D의 공분산 $Cov(\widetilde{R_C}, \widetilde{R_D}) = \sigma_{CD}$

= 불황 시 편차의 곱 × 불황실 확률 + 호황 시 편차의 곱 × 호황시 확률

= -0.001×0.5 + -0.001×0.5 = -0.001

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(2) 공분산의 의미

미래상황	확률	C자산 수익률	D자산 수익률
불황	50%	6%	15%
호황	50%	10%	5%

미래상황	확률	자산 C 수익률 편차	자산 D 수익률 편차
불황	50%	6% − 8%(*1) = −2%	15% − 10%(*2) = 5%
호황	50%	10% − 8%(*1) = 2%	5% − 10%(*2) = −5%

(*1) 자산 C 기대수익률 = $E(R_A)$ = 6%×0.5 + 10%×0.5 = 8%

(*2) 자산 D 기대수익률 = $E(R_B)$ = 15%×0.5 + 5%×0.5 = 10%

- 공분산이 양(+)의 값을 보이면, 두 주식의 수익률이 상황마다 동일한 방향으로 움직인다는 것을 의미
- 만약 음(-)의 값을 보인다면, 상황마다 반대로 움직인다는 것을 뜻함.

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(3) 공분산의 한계와 상관계수

- 공분산은 측정단위와 규모에 따라 달라지므로 공분산이 크다고 해서 자산의 밀접한 관계를 설명하기에는 한계가 있음

① 가격을 기준으로 계산한 공분산

미래상황	확률	자산 E 가격	자산 F 가격
불황	50%	106	105
호황	50%	110	115

미래상황	확률	자산 E 가격 편차	자산 F 가격 편차
불황	50%	106 – 108(*1) = −2	105 – 110(*2) = −5
호황	50%	110 – 108(*1) = 2	115 – 110(*2) = 5

(*1) 자산 E 기대가격 = 106×0.5 + 110×0.5 = 108

(*2) 자산 F 기대가격 = 105×0.5 + 115×0.5 = 110

∴ 자산 E와 자산 F의 가격 공분산 $Cov(\widetilde{P}_E, \widetilde{P}_F) = \sigma_{EF}$

$= 10\times0.5 + 10\times0.5 =$ **10(가격기준)**

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(3) 공분산의 한계와 상관계수

- 가격기준의 공분산 10, 순익률 기준의 공분산 0.001로 나타나 이러한 한계를 극복하기 위해 상관계수를 사용

② 수익률을 기준으로 계산한 공분산

미래상황	확률	자산 E 수익률	자산 F 수익률
불황	50%	6%	5%
호황	50%	10%	15%

미래상황	확률	자산 E 수익률 편차	자산 F 수익률 편차
불황	50%	6% - 8%(*1) = -2%	5% - 10%(*2) = -5%
호황	50%	10% - 8%(*1) = 2%	15% - 10%(*2) = 5%

(*1) 자산 E 기대수익률 = 6%×0.5 + 10%×0.5 = 8%

(*2) 자산 F 기대수익률 = 5%×0.5 + 15%×0.5 = 10%

∴ 자산 E와 자산 F의 수익률 공분산 $Cov(\widetilde{R_A}, \widetilde{R_B}) = \sigma_{EF}$

$= 0.001 \times 0.5 + 0.001 \times 0.5 =$ **0.001(수익률 기준)**

- 상관계수(Correlation Coefficient ; ρ)로 상관관계, 선형관계를 파악

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(3) 공분산의 한계와 상관계수

- 가격과 수익률 기준으로 계산된 상관계수는 아래와 같이 동일한 값을 나타냄

① 가격을 기준으로 계산한 상관계수

$$= \frac{Cov(\widetilde{P_E}, \widetilde{P_F})}{\sigma_E \times \sigma_F} = \frac{10}{2 \times 5} = 1$$

② 수익률을 기준으로 계산한 상관계수

$$= \frac{Cov(\widetilde{R_E}, \widetilde{R_F})}{\sigma_E \times \sigma_F} = \frac{0.0001}{0.02 \times 0.05} = 1$$

공식 4-1 상관계수

$$\text{자산 } A\text{와 자산 } B\text{의 상관계수}(\rho_{AB}) = \frac{A\text{와 } B\text{의 공분산}}{A\text{의 표준편차} \times B\text{의 표준편차}}$$

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(\widetilde{R_A}, \widetilde{R_B})}{\sigma_A \times \sigma_B} \Leftrightarrow \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B = Cov(\widetilde{R_A}, \widetilde{R_B})$$

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(4) 상관계수의 특징

① 두 자산 간의 상관계수의 부호는 언제나 공분산의 부호와 같다.

② 두 자산 간의 상관계수는 -1부터 $+1$까지의 값을 지닌다.

③ 두 자산 간의 상관계수가 1이라면 두 자산은 완벽한 정(正)의 상관관계를 지닌다.

④ 두 자산 간의 상관계수가 -1이라면 두 자산은 완벽한 부(負)의 상관관계를 지닌다.

⑤ 두 자산 간의 상관계수가 0이라면 두 자산은 일정한 관계없이 독립적이다.

공식 4-1 **상관계수**

$$\text{자산 } A\text{와 자산 } B\text{의 상관계수}(\rho_{AB}) = \frac{A\text{와 } B\text{의 공분산}}{A\text{의 표준편차} \times B\text{의 표준편차}}$$

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(\widetilde{R}_A, \widetilde{R}_B)}{\sigma_A \times \sigma_B} \Leftrightarrow \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B = Cov(\widetilde{R}_A, \widetilde{R}_B)$$

2. 포트폴리오의 기초 개념

2. 공분산과 상관계수

(4) 상관계수의 특징

예제

주식 A와 주식 B의 수익률에 대한 확률분포는 아래와 같다.

경기상황	확률	주식 A	주식 B
불황	15%	-10%	8%
보통	60%	10%	3%
호황	25%	22%	10%

물음

① 두 주식간 공분산을 구하시오.

② 두 주신간 상관계수를 구하시오.

③ 위에서 구한 두 주식간 상관계수의 의미를 설명하시오.

2. 공분산과 상관계수

(4) 상관계수의 특징

경기상황	확률	주식 A 편차	주식 B 편차
불황	15%	-10% - 10%$^{(*1)}$ = -20%	8% - 5.5%$^{(*2)}$ = 2.5%
보통	60%	10% - 10%$^{(*1)}$ = 0%	3% - 5.5%$^{(*2)}$ = -2.5%
호황	25%	22% - 10%$^{(*1)}$ = 12%	10% - 5.5%$^{(*2)}$ = 4.5%

(*1) $E(R_A) = -10\% \times 0.15 + 10\% \times 0.6 + 22\% \times 0.25 = 10\%$

(*2) $E(R_B) = 8\% \times 0.15 + 3\% \times 0.6 + 10\% \times 0.25 = 5.5\%$

$Var(R_A) = (-20\%)^2 \times 0.15 + 0\%^2 \times 0.6 + 12\%^2 \times 0.25 = 0.0096$

$\sigma_A = 0.098(=9.8\%)$

$Var(R_B) = 2.5\%^2 \times 0.15 + (-2.5\%)^2 \times 0.6 + 4.5\%^2 \times 0.25 = 0.000975$

$\sigma_B = 0.0312(=3.12\%)$

① $Cov(R_A, R_B) = -20\% \times 2.5\% \times 0.15 + 0\% \times (-2.5\%) \times 0.6 + 12\% \times 4.5\% \times 0.25$

$= \mathbf{0.0006}$

② $\rho_{AB} = \dfrac{Cov(\widetilde{R_A}, \widetilde{R_B})}{\sigma_A \times \sigma_B} = \dfrac{0.0006}{0.098 \times 0.0312} = \mathbf{0.196}$

③ 상관계수가 양의 값이므로 방향성은 같으나 그 절대값이 0에 가깝기 때문에 일정한 관계를 갖는다고 보기 어렵다.

2. 포트폴리오의 기초 개념

3. 포트폴리오의 기대수익률

(예시) 투자금액 100만원으로 자산 A와 B에 분산투자하는 경우, 자산 A와 B로 구성된 포트폴리오의 기대수익률을 구해보자. 100만원 중 60만원은 자산 A에 투자하고 나머지 40만원은 자산 B에 투자한다고 가정한다. 즉, 자산 A의 투자비중(w_A)은 60%, 자산 B의 투자비중(w_B)은 40%이다. 자산 A와 B의 수익률 분포를 통해 각 자산의 기대수익률과 표준편차를 구한 결과 아래와 같다.

구분	자산 A	자산 B
기대수익률	8%	10%
표준편차	2%	5%

포트폴리오의 기대수익률은 자산 A와 자산 B의 기대수익률을 각 자산의 투자비중 60%와 40%로 가중평균하여 구한다.

$\therefore E(R_p) = 8\% \times 0.6 + 10\% \times 0.4 = 8.8\%$

이를 일반식으로 정리한 공식은 다음과 같다.

〈공식 4-2 포트폴리오 기대수익률〉

$$\text{포트폴리오 기대수익률} = \sum (\text{자산별 투자비중} \times \text{자산별 기대수익률})$$

2. 포트폴리오의 기초 개념

3. 포트폴리오의 분산(리스크 감소효과)

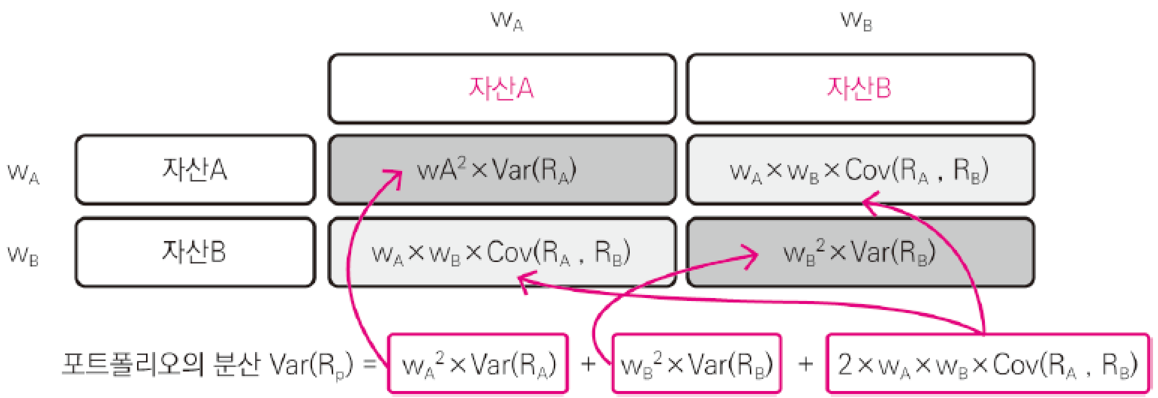
- 자산 간의 표준편차 뿐만 아니라 자산간의 공분산을 통해 포트폴리오 분산을 산출(분산-공분산 매트릭스 : Variance covariance matrix)

〈그림 4-4 두 개의 자산으로 구성된 포트폴리오의 분산–공분산 매트릭스〉

2. 포트폴리오의 기초 개념

3. 포트폴리오의 분산

- 자산 간의 표준편차 뿐만 아니라 자산간의 공분산을 통해 포트폴리오 분산을 산출(분산-공분산 매트릭스 : Variance covariance matrix)



자산 A와 자산 B의 가중평균 표준편차

$$3.2\%(=60\% \times 2\% + 40\% \times 5\%)$$

$$\therefore \sigma_p = \sqrt{Var(R_p)} = 0.008(=0.8\%)$$

3.2% → 0.8%로 감소한 2.4%의 차이를 "포트폴리오효과로 인한 분산투자이득"이라고 한다

만약 두 자산 간의 상관계수를 −1로 가정하면 두 자산 간의 공분산을 구할 수 있다.

$$\sigma_{AB} = \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B = (-1) \times 2\% \times 5\% = -0.001$$

분산-공분산 매트릭스를 통해 포트폴리오 분산 및 표준편차를 구하면 다음과 같다.

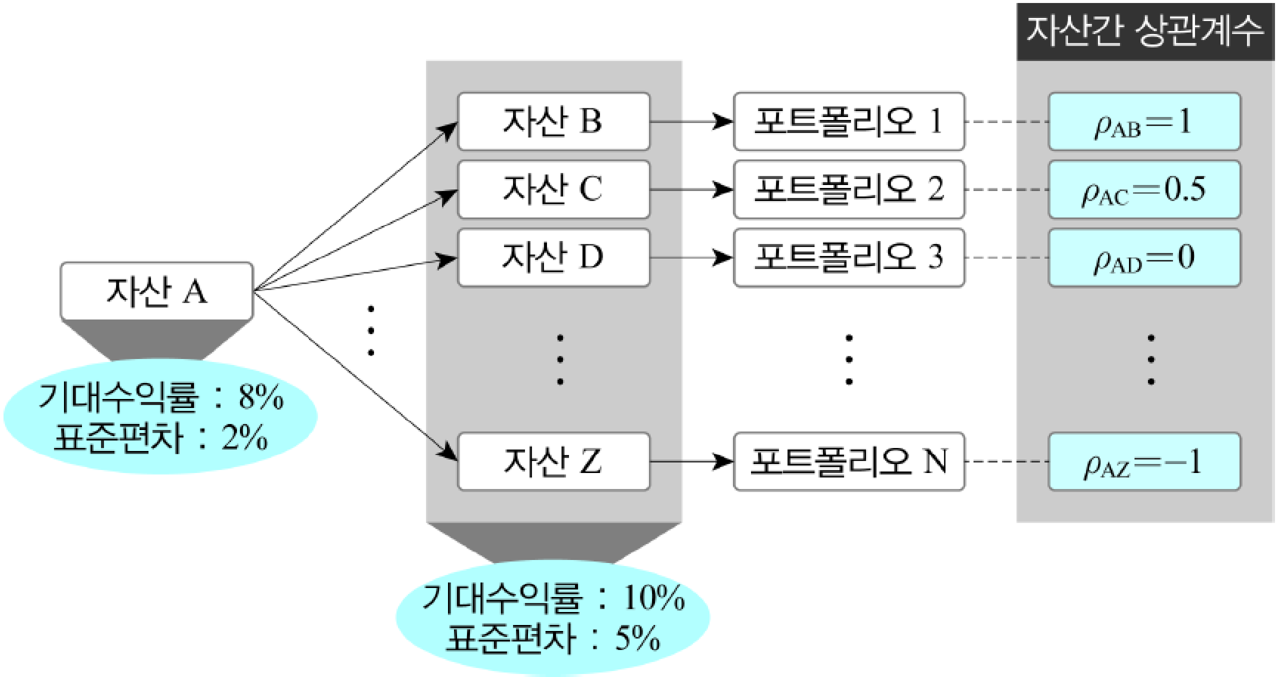
$$\therefore Var(R_p) = 0.6^2 \times 2\%^2 + 0.4^2 \times 5\%^2 + 2 \times 0.6 \times 0.4 \times (-0.001) = 0.000064$$

$$\therefore \sigma_p = \sqrt{Var(R_p)} = 0.008(=0.8\%)$$

3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

- 선행의 포트폴리오 기대수익률과 포트폴리오의 위험(분산, 표준편차)는 상관계수에 따라 차이발생
- 동일한 기대수익률에서 위험을 낮추는 최적의 투자방안을 마련하는 것이 목표

그림 4-5 예시-자산 A와 상관계수가 다른 자산 간의 관계



3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

1. 상관계수가 1인 경우

- 포트폴리오의 분산 $= \boxed{(w_A)^2 \times (\sigma_A)^2 + (w_B)^2 \times (\sigma_B)^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \rho_{AB} \times \sigma_A \times \sigma_B}$

$$= (w_A)^2 \times (\sigma_A)^2 + (w_B)^2 \times (\sigma_B)^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \sigma_A \times \sigma_B$$

$$= (w_A \sigma_A + w_B \sigma_B)^2$$

- 포트폴리오의 표준편차 $= w_A \sigma_A + w_B \sigma_B$

$w_A =$ 자산 A투자비중, $w_B =$ 자산 B투자비중

$(\sigma_A)^2 =$ 자산 A분산, $(\sigma_B)^2 =$ 자산 B분산 , $\sigma_{AB} =$ 자산A와B의 공분산, $\rho_{AB} =$ 자산A와B의 상관계수

✓ 자산 A와 자산 B로 구성한 포트폴리오의 표준편차

- $\sigma_P = 50\% \times 2\% + 50\% \times 5\% = 3.5\%$

미래상황	확률	포트폴리오 수익률 ($R_P = w_A \times R_A + w_B \times R_B$)
불황	50%	9.6% = 60% × 6% + 40% × 15%
호황	50%	8% = 60% × 10% + 40% × 5%

(참고) 개별자산의 기대수익률과 표준편차를 정리하면 다음과 같다.

구분	자산 A	자산 B
기대수익률	8%	10%
표준편차	2%	5%

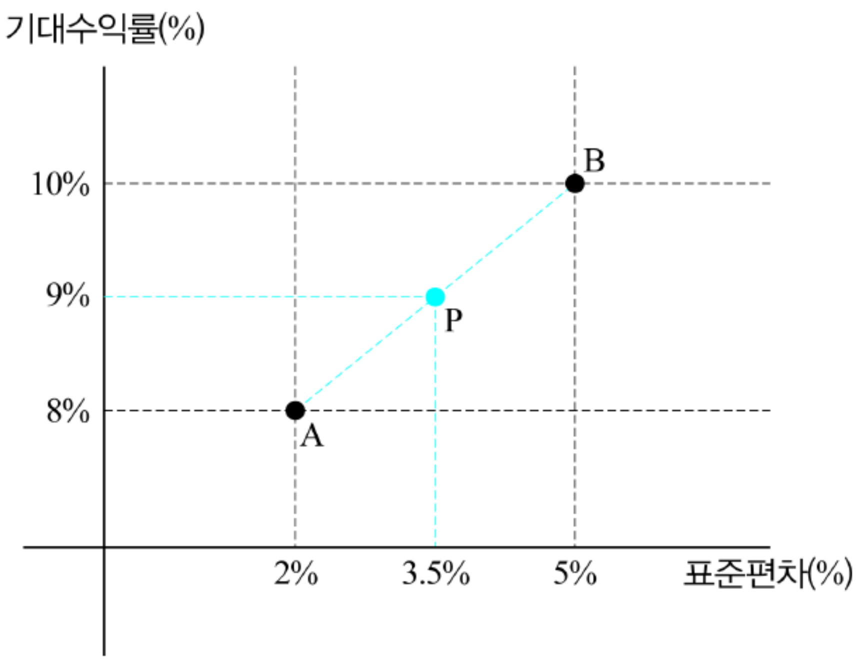
3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

1. 상관계수가 1인 경우

✓ 자산 A와 자산 B로 구성한 포트폴리오의 표준편차

➢ $\sigma_P = 50\% \times 2\% + 50\% \times 5\% = 3.5\%$

그림 4-6 상관계수가 1인 두 자산으로 구성한 포트폴리오 집합



- 상관관계 1이라는 것은 같은 자산이라는 것으로 이해하면 됨.
- 분산효과, 즉 위험이 줄어드는 효과는 없음

3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

2. 상관계수가 0인 경우

- 포트폴리오의 분산$=\boxed{(w_A)^2\times(\sigma_A)^2+(w_D)^2\times(\sigma_D)^2+2\times w_A\times w_D\times\rho_{AD}\times\sigma_A\times\sigma_D}$

  $=(w_A)^2\times(\sigma_A)^2+(w_D)^2\times(\sigma_D)^2$

- 포트폴리오의 표준편차$=\sqrt{(w_A)^2\times(\sigma_A)^2+(w_D)^2\times(\sigma_D)^2}$

$w_A=$ 자산 A투자비중, $w_B=$ 자산 B투자비중

$(\sigma_A)^2=$ 자산 A분산, $(\sigma_B)^2=$ 자산 B분산 , $\sigma_{AB}=$ 자산A와B의 공분산, $\rho_{AB}=$ 자산A와B의 상관계수

✓ 자산 A와 자산 D로 구성한 포트폴리오

- $\sigma_P=\sqrt{(50\%)^2\times(2\%)^2+(50\%)^2\times(5\%)^2}=2.7\%$

여기에서 자산A의 표준편차 : 2

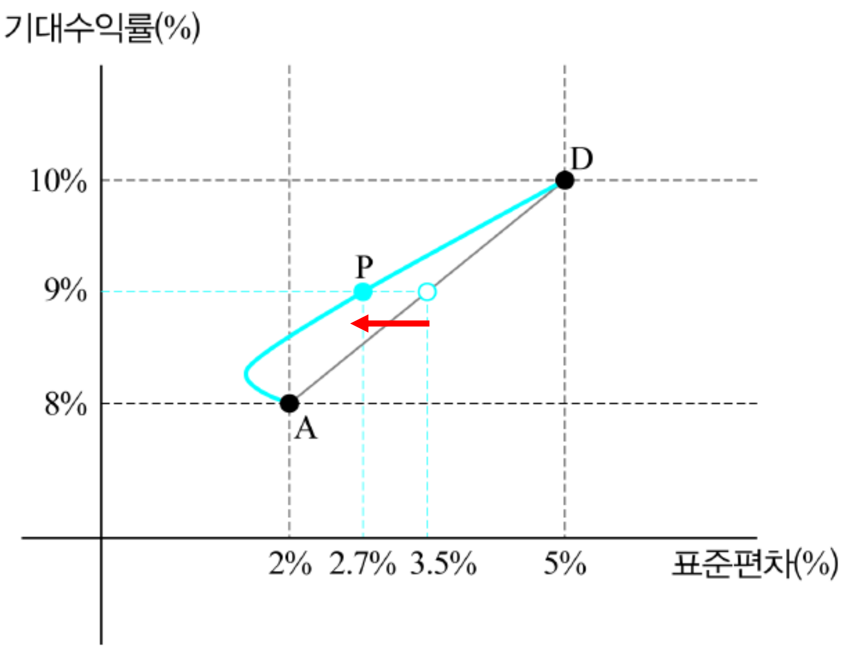
자산D의 표준편차 : 5

3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

2. 상관계수가 0인 경우

- ✓ 자산 A와 자산 D로 구성한 포트폴리오
  - ➢ $\sigma_P = \sqrt{(50\%)^2 \times (2\%)^2 + (50\%)^2 \times (5\%)^2} = 2.7\%$

그림 4-7 상관계수가 0인 두 자산으로 구성한 포트폴리오 집합



- 상관관계가 전혀없을 경우(=0) 분산효과존재
- 단순 가중평균시 3.5% → 2.7% (0.8%).
- 분산이득효과 0.8%

3. 상관계수와 포트폴리오 위험의 관계

3. 상관계수가 -1인 경우

- 포트폴리오의 분산 $= (w_A)^2 \times (\sigma_A)^2 + (w_Z)^2 \times (\sigma_Z)^2 + 2 \times w_A \times w_Z \times \rho_{AZ} \times \sigma_A \times \sigma_Z$

  $= (w_A)^2 \times (\sigma_A)^2 + (w_Z)^2 \times (\sigma_Z)^2 - 2 \times w_A \times w_Z \times \sigma_A \times \sigma_Z$

  $= (w_A \sigma_A - w_Z \sigma_Z)^2$

- 포트폴리오의 표준편차 $= |w_A \sigma_A - w_Z \sigma_Z|$

$w_A =$ 자산 A투자비중, $w_B =$ 자산 B투자비중

$(\sigma_A)^2 =$ 자산 A분산, $(\sigma_B)^2 =$ 자산 B분산 , $\sigma_{AB} =$ 자산A와B의 공분산, $\rho_{AB} =$ 자산A와B의 상관계수

✓ 자산 A와 자산 Z로 구성한 포트폴리오

- $\sigma_P = |50\% \times 2\% - 50\% \times 5\%| \quad = 1.5\%$

여기에서 자산A의 표준편차 : 2

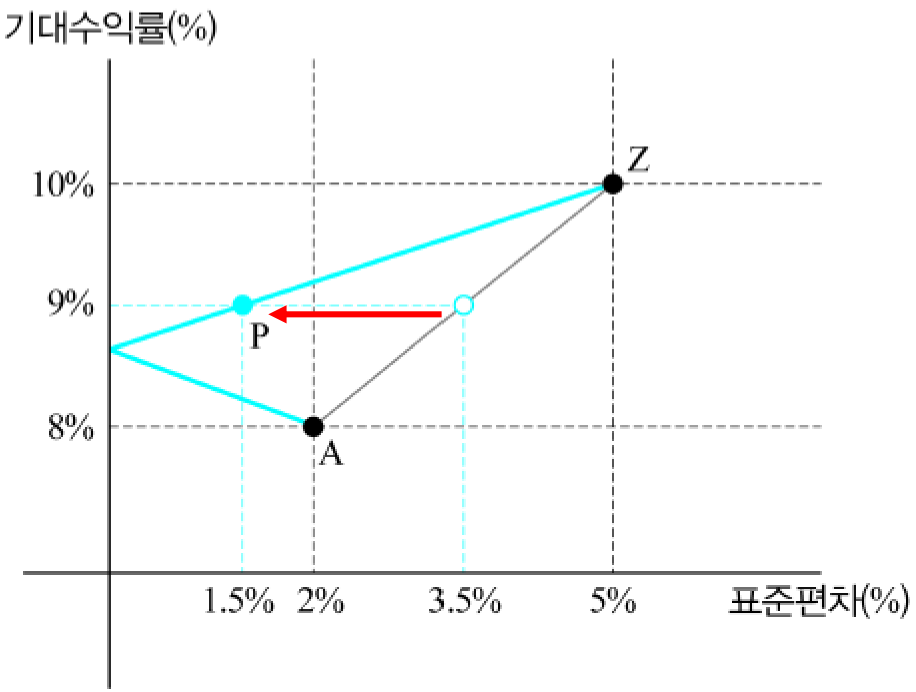
자산Z의 표준편차 : 5

3. 상관계수와 포트폴리오의 위험의 관계

3. 상관계수가 -1인 경우

✓ 자산 A와 자산 Z로 구성한 포트폴리오

➢ $\sigma_P = |50\% \times 2\% - 50\% \times 5\%| \;\; = 1.5\%$



- 상관관계가 전혀없을 경우(=-1) 분산효과존재
- 단순 가중평균시 3.5% → 1.5% (2%)
- 분산이득효과 2%

4. 투자비중과 포트폴리오의 위험의 관계

1. 주어진 상관계수 하에서 최적선택 과정

- 기대수익률이 8%, 표준편차가 2%인 자산 A와 기대수익률이 10%이고 표준편차가 5%인 자산B를 이용하여 포트폴리오를 구성할 경우 투자비중에 따른 분산효과를 분석해보자(상관계수는 -0.5로 일정)

그림 4-9 예시 – 투자비중이 다른 포트폴리오 투자기회집합

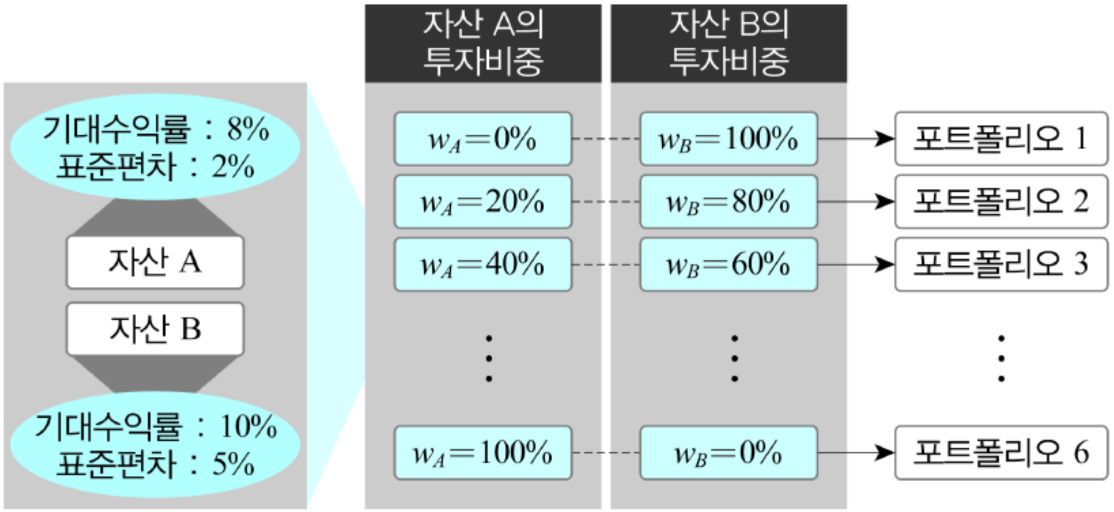
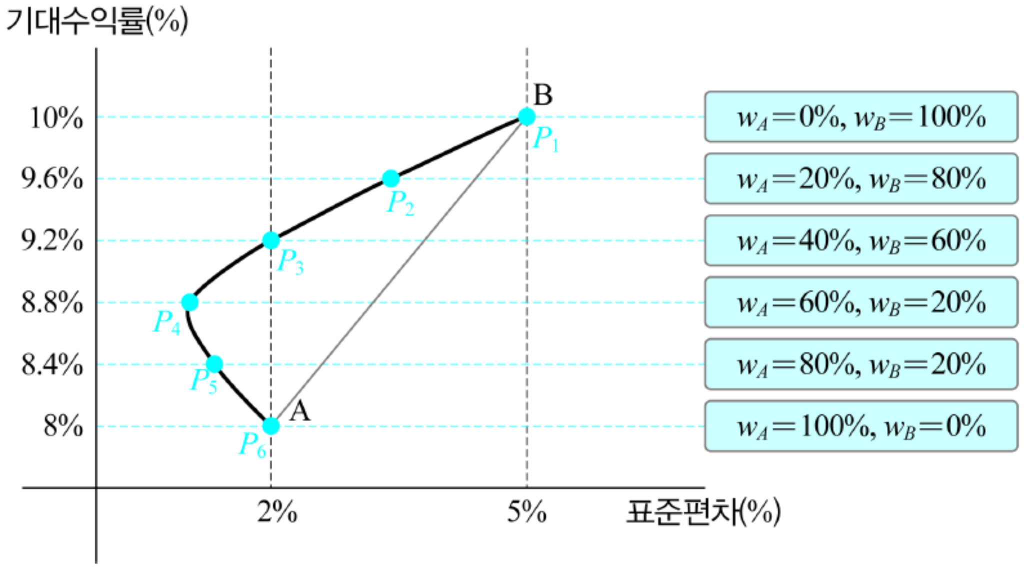


그림 4-10 투자비중이 다른 포트폴리오 투자기회집합 그래프



4. 투자비중과 포트폴리오의 위험의 관계

1. 주어진 상관계수 하에서 최적선택 과정

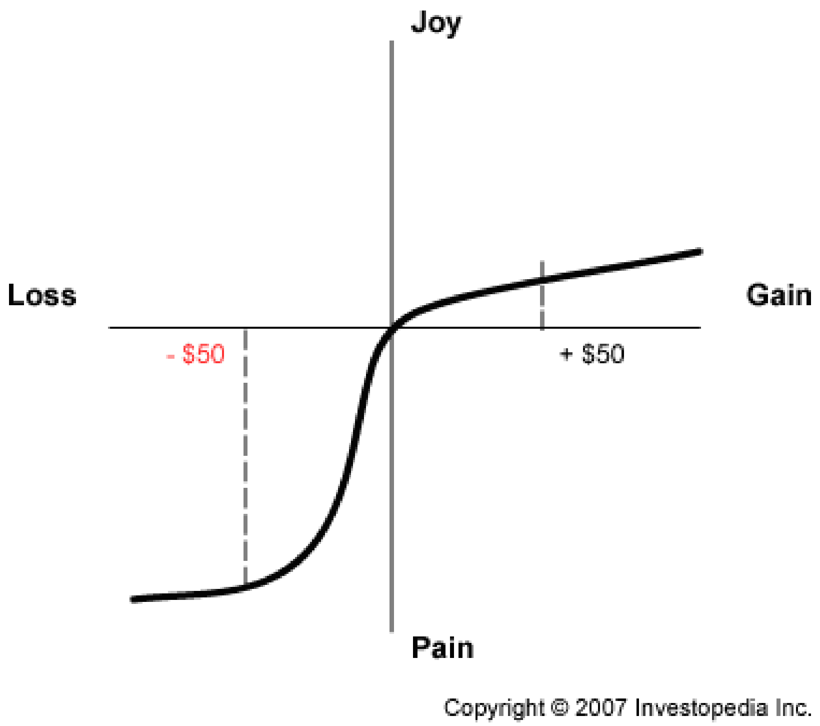
- 투자자의 위험회피성향에 따라 포트폴리오의 선택의 차이가 발생

포트폴리오 구분	자산 A 투자비중	자산 B 투자비중	포트폴리오 표준편차
포트폴리오 1	0%	100%	5%
포트폴리오 2	20%	80%	3.82%
포트폴리오 3	40%	60%	2.69%
포트폴리오 4	60%	40%	1.74%
포트폴리오 5	80%	20%	1.4%
포트폴리오 6	100%	0%	2%

- 위험회피성향이 높을 경우 표준편차가 낮은 A 투자비중이 커짐
- 위험회피성향이 낮을 경우 표준편차가 높은 B 투자비중이 커짐

4. 투자비중과 포트폴리오의 위험의 관계

1. 주어진 상관계수 하에서 최적선택 과정(전망이론)



4. 투자비중과 포트폴리오의 위험의 관계

2. 공매(short selling)

공매(short selling)란, 자산을 빌려서 시장에 판 다음 공매 만기시 동일한 자산으로 갚는 거래를 말한다. 공매는 자산의 가격이 하락할 때, 주로 쓰이는 전략으로 다음의 간단한 예시를 살펴보자.

예를 들어, 현재 자산의 가격이 100인데 1년 후에 50으로 떨어질 것으로 예상한다면 다음과 같은 단계를 통해 이익을 얻을 수 있다.

Step1. 현재 자산을 빌려서 시장에 바로 판다.

Step2. 공매 만기에 자산을 사서 갚는다.

위와 같은 단계를 거치게 되면 Step1에서 100원의 현금흐름이 유입되고, Step2에서 50원의 현금흐름이 유출되므로 최종적으로 50원의 순이익을 얻게 된다.

5. 주식의 수와 포트폴리오 위험

2. 체계적위험과 비체계적 위험

(1) 체계적 위험(Systematic Risk)

- 이자율, 인플레이션, 코로나 등의 모든 자산에 공통적인 영향을 미침
- 회피가 불가능한 위험

(2) 비체계적 위험(Unsystematic Risk)

- 회사 고유의 위험, 제거 가능한 위험, 회피가능한 위험
- 파업, 신제품 개발 등의 고유위험