통계적 추정과 검정

개념

추정(estimation)

- **추정**이란?
  - ✓ 전수조사가 불가능하거나 비실용적인 경우에 대상 모집단으로부터 표본을 추출하고, 이러한 표본을 근거로 확률론을 활용하여 모집단의 모수들에 대해 통계적으로 추론하는 것

- **확률 표본** (random sample)
  - ✓ 확률변수 X가 특정 확률분포를 따른다고 할 때, 이 확률분포로부터 각각 독립적으로 추출된 n개의 표본을 확률표본이라고 한다.
  - ✓ 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$: 서로 독립이고, 각각은 X와 동일한 분포를 갖는다.

용어

- **모수** (population parameter, θ)
  - ✓ 모집단의 특성을 나타내는 수치적 측도
  - ✓ 예) 모평균(μ), 모분산(σ^2)
- **통계량** (statistics)
  - ✓ 확률표본의 함수
  - ✓ 예) 표본평균 $\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$
- **추정량** (estimator)
  - ✓ 모수를 추정하는 통계량
  - ✓ 점추정 : 하나의 값으로 추정하는 것

    예) 모평균의 추정량 $\hat{\mu} = \bar{X}$
  - ✓ 구간추정 : 구간으로 추정하는 것

    예) 모평균의 구간추정 $(\bar{X} - C_L, \bar{X} + C_U)$

신뢰구간(Confidence Interval)

개념

- 신뢰구간의 정의
  - ✓ 두 통계량 C_L, C_U데 대하여

    $$P(C_L < \theta < C_U) = 1 - \alpha$$

    가 성립할 때 구간 (C_L, C_U)을 모수 θ에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이라고 한다.
  - ✓ 구간(C_L, C_U)사이에 모수가 포함될 확률을 나타냄
  - ✓ $1 - \alpha$: 신뢰도 또는 신뢰수준

    0.90,0.95 또는 0.99등의 값을 주로 사용
- 신뢰구간의 성질
  - ✓ 신뢰도을 높게 하면 구간의 길이 증가
  - ✓ 표본의 크기가 증가하면 같은 신뢰수준에서 구간의 길이가 짧아짐

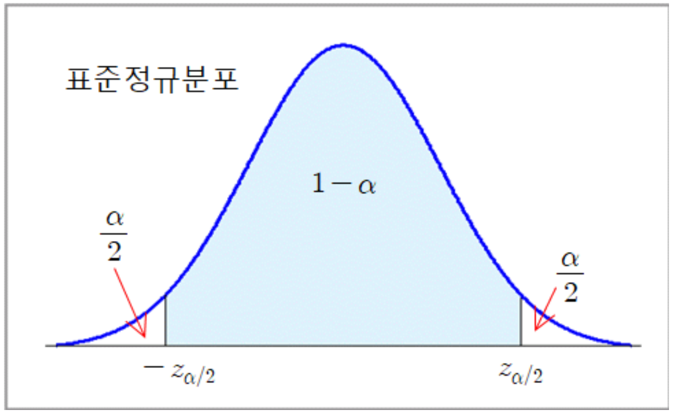
신뢰구간의 예

- 예) 모평균의 90% 신뢰 구간

$$\left(\bar{X} - \boxed{z_{0.05}} \cdot {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}},\ \bar{X} + \boxed{z_{0.05}} \cdot {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right)$$

표준오차

신뢰수준에 따라 달라짐 : $\alpha = 0.05$



가설 검정(Hypothesis Testing)

용어정리

- **귀무가설**(null hypothesis : H_0)
  - ✓ 대립가설에 반대되는 가설
  - ✓ 현재까지 주장되어 온 것이거나 변화나 차이가 없음을 설명하는 가설
- **대립가설**(alternative hypothesis : H_1)
  - ✓ 표본으로부터의 확실한 근거에 의하여 증명하고자 하는 가설
  - ✓ 귀무가설이 기각되었을 때 채택되는 가설
- 양측/단측 검정 (one-sided/two-sided)

통계적 가설 검정

- **가설검정**
  - ✓ 모수의 값에 대한 주장 또는 단순한 추측 등의 옳고 그름에 대한 결정을 하는 과정
  - ✓ **H_0의 반증에 대한 강도**를 제공하여 H_0의 기각 여부(H_1의 채택 여부)를 판정
- **검정통계량** (test statistic) : 가설 검정에 사용되는 통계량
  - ✓ 검정통계량의 분포는 가설에서 주어지는 모수에 의존
- 귀무가설이 옳다는 전제하에서 구한 검정통계량의 값이 나타날 가능성이 크면 귀무가설을 채택, 나타날 가능성이 작으면 귀무가설을 기각

가설 검정(Hypothesis Testing)

통계적 가설 검정 - 예제

- 기존 공정에서 전구의 수명 시간은 평균 $\mu_0 = 1500$, 표준편차 $\sigma = 100$이라고 알려져 있다. 새로운 공법에 대하여 25개의 표본을 조사한 결과 표본 평균은 $\bar{x}$=1550였다.

  μ : 새로운 공정에 의한 전구의 평균 수명 시간

양측검정

Q) 새로운 공법와 기존의 공법의 평균 수명이 다른가?

$H_0: \mu = 1500$ vs. $H_1: \mu \neq 1500$

→ 1500과 차이가 많이 날수록 H_1을 더 지지할 수 있음, H_0에 대한 반증의 강도가 커짐

단측검정

Q) 새로운 공법에 의해 평균 수명이 증가하였는가?

$H_0: \mu = 1500$ vs. $H_1: \mu > 1500$

→ 1500보다 크면 클수록 H_1을 더 지지할 수 있음. H_0에 대한 반증의 강도가 커짐

가설 검정(Hypothesis Testing)

통계적 가설 검정 - 예제

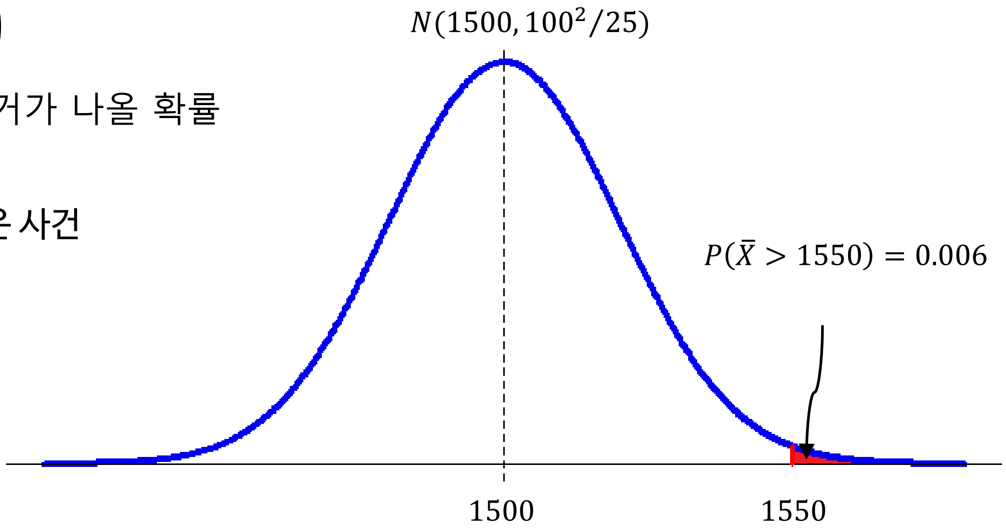
- 단측검정 : $H_0: \mu = 1500$ vs. $H_1: \mu > 1500$
  - ✓ 표본평균의 값이 1500보다 크면 클수록 귀무가설에 대한 반증의 강도가 커짐
  - ✓ 이 검정에서의 검정통계량은 표본평균 ($\bar{X}$) (※ 실제 표준화한 값 사용)
  - ✓ H_0가 참이라고 가정하면,

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n) = N\left(1500, \frac{100^2}{25}\right)$$

  - ✓ $\bar{x}$=1550 보다 더 좋은 (H_1을 지지하기 위한) 증거가 나올 확률

$$P(\bar{X} > 1550) = 0.006$$

  - ✓ 확률값이 매우 작으므로, 이는 좀처럼 일어나기 어려운 사건
    - ⇒ 귀무가설이 맞다는 가정이 틀렸다고 할 수 있음
    - ⇒ H_0기각 또는 H_1 채택
  - ✓ 확률값이 얼마나 작아야 기각?



가설 검정(Hypothesis Testing)

오류의 종류와 유의수준

- 가설검정에서 오류의 종류

실제상황 / 검정결과	H_0 가 참	H_1이 참
H_0 기각 못함	옳은 결정	**제 2종의 오류(β)**
H_0 기각 (H_1 채택)	**제 1종의 오류(α)**	옳은 결정

- 유의수준 (significance level : α) : 제 1종의 오류를 범할 확률의 최대허용한계로 미리 지정해주는 기준값
  - ✓ 흔히 유의수준은 $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ 을 사용

- 유의수준 α인 검정법 : 제 1종의 오류를 범할 최대 확률이 α 이하인 검정방법

가설 검정(Hypothesis Testing)

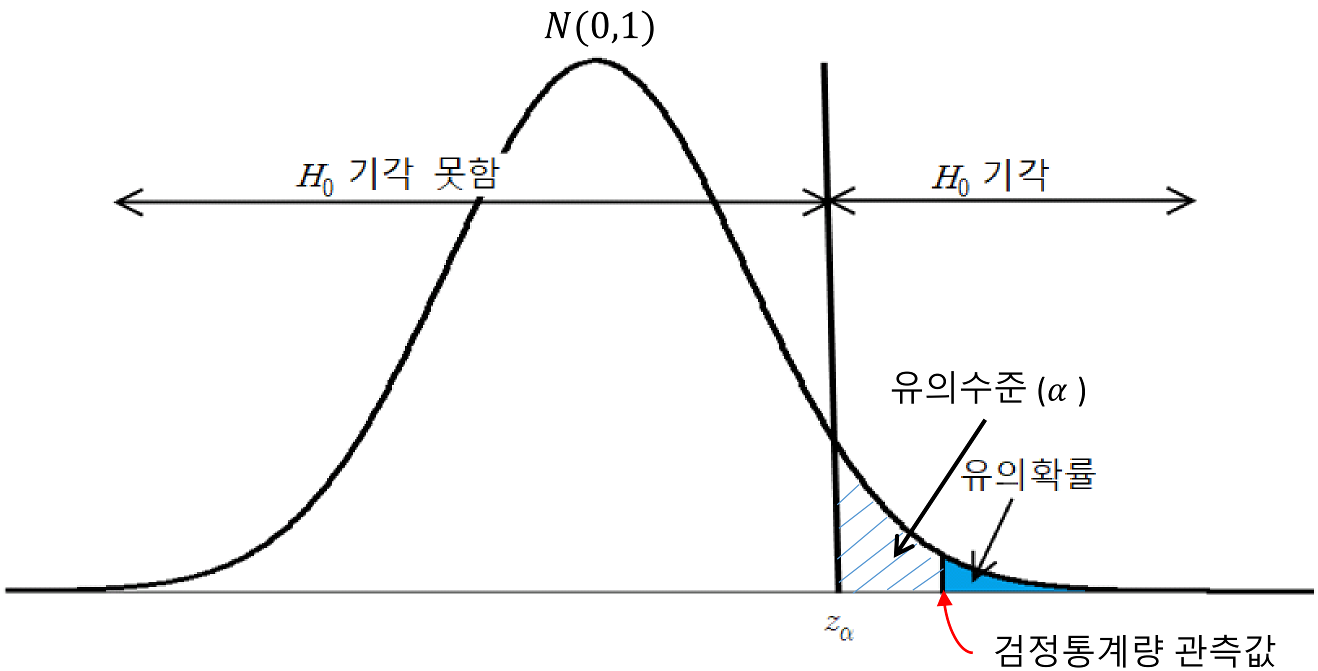
유의성 검증

- 유의성 검증과 유의 확률
  - ✓ **유의성 검증** (test of significance) : 귀무가설에 대한 반증의 강도를 제공하는 과정
  - ✓ **유의확률** (significance probability) 또는 **P-vaue** : 검정통계량이 실제 관측된 값보다 대립가설을 지지하는 방향으로 더울 치우칠 확률로서 귀무가설 하에서 계산된 값
    - 유의확률이 작을수록 H_0에 대한 반증이 강한 것을 의미
    - 즉 유의확률이 작으면 대립가설 H_1이 참인 증거가 강함
    - 유의확률을 계산하는 데에는 귀무가설하에서 검정통계량의 분포 이용
- **기각역** (critical region) C
  - ✓ 귀무가설을 기각하게 되는 검정통계량 관측값의 범위
  - ✓ 유의수준 : 귀무가설하에서 검정통계량이 기각역에 속할 확률

가설 검정(Hypothesis Testing)

유의성 검증

- 예) $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu > \mu_0$



가설 검정(Hypothesis Testing)

가설 검정 (단측 검정)

- 예제) 기존 공정에서 전구의 수명 시간은 평균 $\mu_0 = 1500$, 표준편차 $\sigma = 100$이라고 알려져 있다. 새로운 공정을 도입하였을 때 전구의 평균 수명이 증가하였는지 확인하고자 한다. (유의수준 : $\alpha = 0.05$)

가설설정

$H_0 : \mu = 1500$

$H_1 : \mu > 1500$

- ✓ H_1 : 보이고자 하는 가설
- ✓ H_0 : 반대되는 가설

표본추출

25개의 제품 확인

표본 평균= 1550

- ✓ 평균에 대한 검정
- ✓ 표본 평균 : 가설 검정을 하기 위해 얻은 증거 (검정통계량)
- ✓ H_0가 참일 때 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$
- ✓ 검정통계량(표준화)

검정

유의확률

$P(\bar{X} > 1550) = 0.006$

- ✓ H_0가 참이라고 가정했을 때, H_1을 채택하기 위해 1550 보다 더 좋은 증거가 나올 확률

검정결과

유의확률 < 0.05

H_0 기각 , H_1 채택

- ✓ 주어진 유의수준(α) 보다 작으면 H_0 기각(H_1 채택)

가설 검정(Hypothesis Testing)

가설 검정 (양측 검정)

- 예제) 건물의 소화용으로 사용되는 살수장치를 생산하는 회사에서 이 살수장치가 실내온도 55도에서 작동되도록 제조하려고 한다. 제조공정의 이상 여부를 판단하기 위하여 일부 표본을 추출하여 작동 시작 온도를 조사하고자 한다. 작동 시작 온도의 표준편차는 $\sigma = 0.9$라고 가정하자. (유의수준 : $\alpha = 0.05$)

가설설정	표본추출	검정	검정결과
$H_0 : \mu = 55$ $H_1 : \mu \neq 55$	9개의 제품 확인 표본 평균= 55.3	유의확률 $P(\lvert\bar{X}\rvert > 55.63) = 0.0179$	유의확률 < 0.05 H_0 기각 , H_1 채택

가설설정
- ✓ μ : 작동 시작 온도의 평균
- ✓ H_1 : 보이고자 하는 가설
- ✓ H_0 : 반대되는 가설

표본추출
- ✓ 평균에 대한 검정
- ✓ 검정통계량 : $\bar{X}$
- ✓ H_0가 참일 때 $\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$

검정
- ✓ H_0가 참이라고 가정
- ✓ H_1을 채택하기 더 좋은 증거는 55보다 멀리 떨어진 값을 갖는 것
- ✓ 유의확률은 55.63보다 더 멀리 떨어져 있을 확률

검정결과
- ✓ 주어진 유의수준(α)보다 작으면 H_0 기각(H_1 채택)

모평균에 관한 가설검정 : Z-검정(Z-test)

모집단의 **표본 평균 분포**를 이용한 **모평균에 관한 가설을 검정**

단일 표본 Z-검정

- 기본 가설
  - ✓ $X_1, \ldots, X_n$: 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 모집단으로 부터의 랜덤 표본
  - ✓ $x_1, \ldots, x_n$: 관측값
  - ✓ 모분산(σ^2) : 알려져 있음
- 귀무가설 $H_0 : \mu = \mu_0$
- 검정 통계량

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

  - ✓ 귀무가설하에서, $Z \sim N(0,1)$
  - ✓ $\bar{X}$: 표본평균
- 검정 통계량 관측 값 : $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

- 대립가설

대립가설	유의수준α의기각역	P-Value	검정형태
$H_1 : \mu > \mu_0$	$z_0 \geq z_\alpha$	$P(Z \geq z_0)$	단측검정
$H_1 : \mu < \mu_0$	$z_0 \leq -z_\alpha$	$P(Z \leq -z_0)$	단측검정
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$	$P(Z \geq \lvert z_0 \rvert)$	양측검정

  - ✓ $Z \sim N(0,1)$
  - ✓ 검정 통계량의 관측값이 기각역에 속하거나 유의확률 값이 α보다 작으면 귀무가설 기각
  - ✓ 모집단이 정규분포가 아니여도, n 이 충분히 크면 z-검정 가능

모평균에 관한 가설검정 : T-검정

모집단의 **표본 평균 분포**를 이용한 **모평균에 관한 가설을 검정**

단일 표본 T-검정

- 기본 가정
  - ✓ $X_1, \ldots, X_n$: 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 모집단으로 부터의 랜덤 표본
  - ✓ $x_1, \ldots, x_n$: 관측값
  - ✓ 모분산(σ^2)이 알려져 있지 않음
- 귀무가설 $H_0 : \mu = \mu_0$
- 검정 통계량

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

  - ✓ 귀무가설하에서, $T \sim t(n-1)$
  - ✓ $\bar{X}$: 표본평균, S : 표본표준편차
- 검정 통계량 관측 값 : $t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$

- 대립가설

대립가설	유의수준 α의 기각역	P-Value	검정형태
$H_1 : \mu > \mu_0$	$t_0 \geq t_\alpha(n-1)$	$P(T \geq t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu < \mu_0$	$t_0 \leq -t_\alpha(n-1)$	$P(T \leq -t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$P(T \geq \lvert t_0 \rvert)$	양측검정

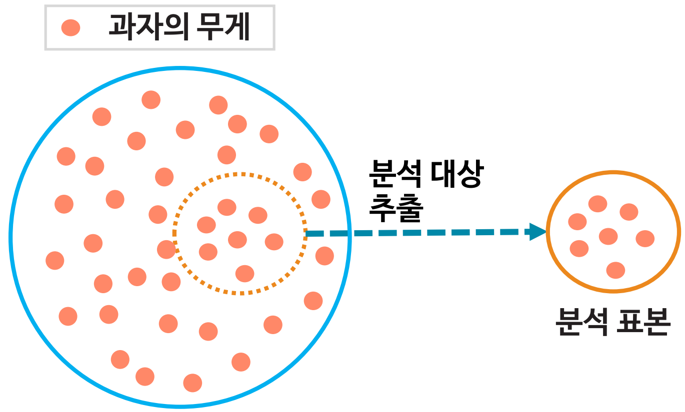
  - ✓ $T \sim t(n-1)$
  - ✓ 검정 통계량의 관측값이 기각역에 속하거나 유의확률 값이 α보다 작으면 귀무가설 기각
  - ✓ n 이 충분히 크면 z-검정 가능

모평균에 관한 추론

모집단의 **표본 평균 분포**를 이용한 **모평균에 관한 가설을 검정**

예제 – 유의성 검정

- 질문 : A과자의 무게가 350g이라고 한다. 이 과자의 무게가 정말 350g일까?
- 가설 : 양측검정
  - ✓ H_0 : 과자의 평균 무게는 350g 이다
  - ✓ H_1 : 과자의 평균 무게는 350g 이 아니다
- 유의수준 5%
- 검정통계량 관측값 : $t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = -4.881$
- 유의확률 〈 0.0005
- 결론 : 유의확률이 5%보다 작으므로 귀무가설 기각. 즉 유의수준 5%하에서 과자의 평균 무게는 350g 이라고 할 수 없다.



통계량

구분	표본평균 $(\bar{x})$	표본표준편차 (s)	표본크기 (n)
과자무게	344.7	3.4335	10

두 모집단의 모평균비교

요약

- 모집단의 **표본 평균 분포**를 이용한 **모평균에 관한 가설을 검정**

	분포	표본크기	표본평균	표본분산
모집단1	$N(\mu_1, \sigma_1^2)$	n_1	$\bar{X}$	S_1^2
모집단2	$N(\mu_2, \sigma_2^2)$	n_2	$\bar{Y}$	S_2^2

두 모집단이 독립 ➡ 독립비교

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (이분산) → n_1, n_2 가 충분히 클 때 / n_1, n_2 가 크지 않을 때

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (등분산)

F-검정

두 모집단이 쌍으로 관찰 ➡ 쌍체비교 (대응비교)

두 모집단의 모평균비교

독립적인 두 모집단의 **모평균의 차이**에 대한 가설 검정

독립 이표본 T-검정 1

- 기본 가정
  - ✓ $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - ✓ 두 모집단이 독립
  - ✓ n_1, n_2 가 충분히 큼
- 귀무가설 $H_0 : \mu_1 = \mu_2\ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$
- 검정 통계량

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

귀무가설하에서, $Z \sim N(0,1)$

- 검정 통계량 관측 값 : $t_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$

- 가설검정

대립가설	유의수준α의기각역	P-Value	검정형태
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t_0 \geq z_\alpha$	$P(Z \geq t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t_0 \leq -z_\alpha$	$P(Z \leq -t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0 \rvert \geq z_{\alpha/2}$	$P(Z \geq \lvert t_0 \rvert)$	양측검정

- ✓ $Z \sim N(0,1)$
- ✓ 검정 통계량의 관측값이 기각역에 속하거나 유의확률 값이 α보다 작으면 귀무가설 기각

두 모집단의 모평균비교

독립적인 두 모집단의 **모평균의 차이**에 대한 가설 검정

독립 이표본 T-검정 2

- 기본 가정
  - ✓ $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - ✓ 두 모집단이 독립
  - ✓ $n_1, n_2 \geq 5$을 만족
- 귀무가설 $H_0 : \mu_1 = \mu_2\ (\mu_1 - \mu_2 = 0)$
- 검정 통계량

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

귀무가설하에서, $T \sim t(df)$

- 검정 통계량 관측 값 : $t_0 = \frac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$

- 가설검정

대립가설	유의수준α의기각역	P-Value	검정형태
$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$t_0 \geq t_\alpha(df)$	$P(T \geq t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$t_0 \leq -t_\alpha(df)$	$P(T \leq -t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{\alpha/2}(df)$	$P(T \geq \lvert t_0 \rvert)$	양측검정

✓ $T \sim t(df)$

$$df = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$$

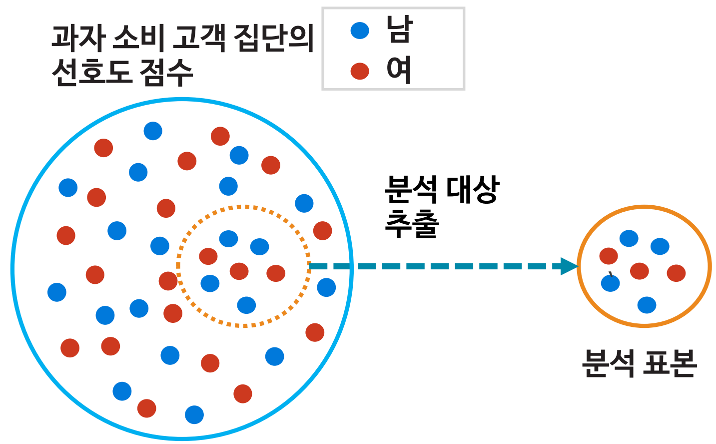
✓ 검정 통계량의 관측값이 기각역에 속하거나 유의확률 값이 α보다 작으면 귀무가설 기각

두 모집단의 모평균 비교

독립적인 두 모집단의 **모평균의 차이**에 대한 가설 검정

독립 이표본 T-검정 – 예제

- 질문 : 남자와 여자의 과자의 선호도 점수는 정말 다를까?
- 가설 : 양측검정
  - ✓ H_0 : 남/여의 평균 과자 선호도 점수는 같다
  - ✓ H_1 : 남/여의 평균 과자 선호도 점수는 다르다
- 유의수준 5%
- 검정통계량 관측값 : 3.7228
- 유의확률 : 0.00164
- 결론 : p-value 〈 0.005이므로 유의수준 5% 하에 귀무가설 기각, 남/여의 평균 선호도 점수는 다르다고 할 수 있음.



통계량

구분	표본평균	표본표준편차	표본크기
남	75.6	9.16	10
여	61.6	7.59	10

두 모집단의 모평균비교 - 쌍체 표본 (대응비교)

쌍으로 조사된 동질한 두 모집단의 차이에 대한 검정

쌍체 표본 T-검정

- 기본 가정
  - ✓ $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  - ✓ $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$: 쌍으로 관측
  - ✓ $D_i = X_i - Y_i$ 라 하면 ,

    $D_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$
- 귀무가설 $H_0 : \mu_D = 0 \ (\mu_1 = \mu_2)$
- 검정 통계량 : 귀무가설하에서,

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- 검정 통계량 관측 값 : $t_0 = \dfrac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}}$

- 가설검정

대립가설	기각역	P-Value	검정형태
$H_1 : \mu_D > 0$	$t_0 \geq t_\alpha(n-1)$	$P(T \geq t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_D < 0$	$t_0 \leq -t_\alpha(n-1)$	$P(T \leq -t_0)$	단측검정
$H_1 : \mu_D \neq 0$	$\lvert t_0 \rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$P(T \geq \lvert t_0 \rvert)$	양측검정

- ✓ $T \sim t(n-1)$
- ✓ 검정 통계량의 관측값이 기각역에 속하거나 유의확률 값이 α보다 작으면 귀무가설 기각

두 모집단의 모평균비교 - 쌍체 표본 (대응비교)

쌍으로 조사된 동질한 두 모집단의 차이에 대한 검정

쌍체 표본 T-검정 - 예제

- 임의로 추출된 10명의 비만 여성에 대하여 감량을 위한 음식 조절법을 실시한 전후의 체중이 다음과 같다. 음식 조절법의 효과가 있는지 유의수준 5%에서 검정하여라.

	1	2	3	4	5
전	82.1	78.1	86.2	84.8	95.2
후	80.7	78.1	83.9	83.5	91.2

	6	7	8	9	10
전	91.6	75.3	78.5	83.0	83.5
후	91.2	72.6	76.2	81.6	81.2

- 가설검정
  - ✓ D_i=(음식조절법전체중) – (음식조절법후체중)
  - ✓ μ_D : 음식 조절법 전 후 체중 차이의 평균
  - ✓ $\bar{d} = 1.81,\ s_d = 1.16,\ n = 10$
  - ✓ 가설

    H_0 : 음식조절법의 효과가 없음 $\mu_D = 0$

    H_1 : 음식조절법의 효과가 있음 $\mu_D > 0$
  - ✓ 검정통계량 관측값 : $t_0 = \frac{\bar{d}}{s_D/\sqrt{n}} = 4.34$
  - ✓ 유의확률 〈 0.0005
  - ✓ 결론 : 유의확률이 5%보다 작으므로 귀무가설 기각. 즉, 음식조절 후 체중의 평균이 음식 조절 전에 비해 줄었다고 할 수 있다.

모분산에 관한 추론

모분산의 추정량으로는 표본분산을 사용하며, 표본 분산은 카이제곱 분포를 따른다는 것이 알려져 있음

모분산에 관한 추론

- 모집단 : 평균 μ, 분산 σ^2 인 정규분포
- 모분산(σ^2)의 추정량

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

- 모표분편차 (σ)의 추정량 : $\hat{\sigma} = S$
- 모분산의 분포 : $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- 모분산의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

- 가설검정
  - ✓ 귀무가설 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
  - ✓ 검정 통계량 : 귀무가설하에서,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

  - ✓ 검정 통계량 관측 값 : $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

대립가설	유의수준 α의 기각역	유의 확률
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_0^2 \geq \chi_\alpha^2\ (n-1)$	$P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	$P(\chi^2 \leq \chi_0^2)$
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ 또는 $\chi_0^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$	$2P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$ 또는 $2P(\chi^2 \leq \chi_0^2)$

모분산에 관한 추론

모분산의 추정량으로는 표본분산을 사용하며, 표본 분산은 카이제곱 분포를 따른다는 것이 알려져 있음

모분산에 관한 추론 - 예제

- 볼트를 생산하는 한 공장에서는 제품의 품질이 얼마나 균일하게 유지되는지를 검사하려고 10개의 볼트를 추출하여 지름을 측정하고 그 표준편차를 구하였더니 0.4mm였다. (그 공장에서 생산되는 볼트의 지름이 정규분포를 따른다고 가정)
- 95% 신뢰구간,
  - ✓ $\alpha = 0.05$
  - ✓ $\chi^2_{0.975}(9) = 2.7, \chi^2_{0.025}(9) = 19.0$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$= \left(9 \cdot \frac{0.4^2}{19.0}, 9 \cdot \frac{0.4^2}{2.7}\right) = (0.075,0.533)$$

- 가설검정
  - ✓ Q)표준편차가 0.2 보다 크다고 할 수 있는가?
  - ✓ 가설 $H_0 : \sigma^2 = 0.2$ vs. $H_1 : \sigma^2 > 0.2$
  - ✓ 유의수준 5%
  - ✓ 검정 통계량 관측 값

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 9 \cdot \frac{0.4^2}{0.2^2} = 36$$

  - ✓ 유의확률 〈 0.0005
- 결론 : 유의확률이 5%보다 작으므로 귀무가설 기각. 즉 유의수준 5%하에서 볼트 공정의 표준편차는 0.2보다 크다고 할 수 있다.

End of Document